50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (A) „Mathematik macht Freu(n)de“ 1. März 2019

1. Man bestimme alle ganzen Zahlen a, für die die Gleichung

   $(x+a)^2 + (x+3a)^2 + (x+5a)^2 = (x+2a)^2 + (x+4a)^2 + (x+6a)^2$

   Lösungen x hat, für die $2010 \leq x \leq 2020$ gilt.

2. a) Julia schreibt eine dreistellige Zahl an die Tafel, die durch 18 teilbar ist. Daneben schreibt sie alle Zahlen, die man erhält, wenn man bei der ersten Zahl die Ziffern vertauscht. Dabei fällt ihr auf, dass eine der Zahlen durch 83 teilbar ist. Welche Zahlen stehen an der Tafel?

   b) Sophie schreibt eine dreistellige Zahl an die Tafel, die die Ziffer Null nicht enthält und auch keine zwei gleichen Ziffern. Daneben schreibt sie alle Zahlen, die man erhält, wenn man bei der ersten Zahl die Ziffern vertauscht. Dabei fällt ihr auf, dass es eine Zahl gibt, die kleiner als 200 ist. Wie viele Zahlen sind größer als 200?

3. Man bestimme alle Primzahlen x und y, für die $-2x^2 + 3xy - y^2$ eine Primzahl ist.

4. Man beweise: Für alle reellen Zahlen x und y, für die $x + y = 2019$ gilt, gilt auch $x^2 + 2y \geq 4037$. Für welche x und y gilt das Gleichheitszeichen?

5. Schreibt man die Ziffer Neun 2019 mal hintereinander, so erhält man die Zahl z.

   a) Man ermittle die Ziffernsumme der Zahl z^3.

   b) Wie viele ganze Zahlen x mit $|x| < 2019$ gibt es, fur die $(z - x)^2$ durch 9 teilbar ist?

6. Wir nennen eine natürliche Zahl $n > 1$ eine “ schöne Zahl ”, wenn sie folgende beiden Eigenschaften hat:

   - Dividiert man n durch die kleinste Primzahl, die Teiler von n ist, so erhält man das Quadrat einer Primzahl.
   - Dividiert man n durch die größte Primzahl, die Teiler von n ist, so erhält man ebenfalls das Quadrat einer Primzahl.

   Man bestimme alle schönen Zahlen, die kleiner als 2019 sind.

7. A sei die Summe aller natürlichen Zahlen kleiner oder gleich n, B sei die Summe aller natürlichen Zahlen kleiner oder gleich $2n$, C sei die Summe aller natürlichen Zahlen kleiner oder gleich $3n$.

   Man beweise, dass $C - B - A$ für alle positiven natürlichen Zahlen n keine Quadratzahl ist.

8. Man bestimme alle Paare von positiven ganzen Zahlen x und y, für die
   $2016 ggT(x, y) = xy = 16 kgV(x, y)$
   gilt.
9. Man bestimme alle Paare (x, y) von natürlichen Zahlen, die Lösung der Gleichung
   $y^2 - 4x^2 = 20x + 16$
   sind.