50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 10. Mai 2019

1. 1) Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis c. P sei ein beliebiger Punkt auf dieser Basis. Man stelle die beiden Lote auf die beiden Schenkel auf und erhält die Punkte D und E als Lotfußpunkte. Beweise, dass die Summe der Strecken EP und PD konstant ist!

2. Beweise, dass für keine natürliche Zahl$n$ ein Ausdruck der Form $n^2 + 11n + 30$ eine Quadratzahl sein kann.

3. Finde alle Zahlenpaare (a, b) für die gilt, dass die Summe ihrer Quadrate $a^2 + b^2$ gleich dem Produkt ihrer Summe $a + b$ und 13 ist!

4. Man beweise für alle reellen positiven Zahlen a, b die Ungleichung
$$\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$$

5. Der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$ wird an C gespiegelt. Dadurch erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDE mit der Strecke AM wird mit S bezeichnet. Man zeige, dass S die Strecke AM halbiert.

6. Gegeben ist die Menge A der natürlichen Zahlen von 1 bis 15. Kann man zwei Zahlen aus A so auswählen, dass ihr Produkt gleich der Summe der restlichen 13 Zahlen von A ist?

7. Es seien a, b reelle Zahlen. Beweise:
$$2(a^4 + b^4 + a^2b^2) \geq 3ab(a^2 + b^2)$$

8. Sind M und N die Mittelpunkte der Seiten AB bzw AD des Parallelogramms $ABCD$, dann zerlegen die Geraden CM und CN die Diagonale in 3 gleiche Teilstücke.

9. Bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung
$$\frac{x^2}{2.} + \frac{5}{y} = 7.$$

10. Gegeben sei das Rechteck $ABCD$ mit $DA = 8$, $DC = 6$ und dem Punkt E auf AD mit $DE = 6$. CE schneidet den Umkreis des Rechtecks in F. Bestimme die Länge DF bzw. FB.

11. Zeige: Für alle reellen Zahlen a, b gilt:

$$a^2(1 + b^2) + 1 \geq 2ab$$