



50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (A) „Mathematik macht Freu(n)de“

12. April 2019

1. Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Auf eine Tafel wird ein $n \times n$ -Raster gezeichnet und jedes Feld mit einer der Zahlen -1 bzw. $+1$ beschriftet. Anschließend werden die n Zeilen- und auch die n Spaltensummen berechnet und die Summe S_n aller dieser $2n$ Summen bestimmt.
 - a) Man zeige: Für keine ungerade Zahl n gibt es eine Beschriftung mit $S_n = 0$.
 - b) Man zeige: Ist n eine gerade Zahl, so gibt es mindestens sechs verschiedene Beschriftungen mit $S_n = 0$.(Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene, 2019)
2. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n , die kleiner als 128^{97} sind und genau 2019 Teiler haben.
(Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene, 2019)
3. Gegeben ist ein Stück Papier. Es wird in acht oder zwölf beliebige Stücke zerschnitten. Jedes der entstandenen Stücke darf man wieder in acht oder zwölf Stücke zerschneiden oder unzerschnitten lassen, usw. Kann man auf diese Weise 60 Stücke bekommen? Man zeige, dass man jede beliebige Anzahl, die größer als 60 ist, erhalten kann.
4. Sei M eine Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Für je zwei Punkte in M liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke dieser Punkte wieder in M . Umgekehrt ist jeder Punkt von M ein Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier unterschiedlicher Punkte aus M .
Man zeige, dass M unendlich viele Punkte enthält!
5. Wir erfinden eine neue Schachfigur, den Esel. In einem Zug wechselt der Esel zunächst zu einem Nachbarfeld und bewegt sich dann normal zum ersten Schritt um drei Felder weiter. Er darf, z.B., vom Feld A1 auf das Feld B4 gehen. Am Anfang steht der Esel auf dem Feld A1. Kann er nun (in einem oder mehreren Zügen) das Feld A8 erreichen?
6. Wählt man unter den ersten $2 \cdot n$ Zahlen auf beliebige Art $n + 1$ aus, so finden sich darunter immer zwei Zahlen, sodass die eine ein Vielfaches der anderen ist.
(Paul Erdős)
7. Es seien a , b und c natürliche Zahlen mit der Summe 70. Man bestimme den größten Wert, den das Produkt $P = abc$ annehmen kann.