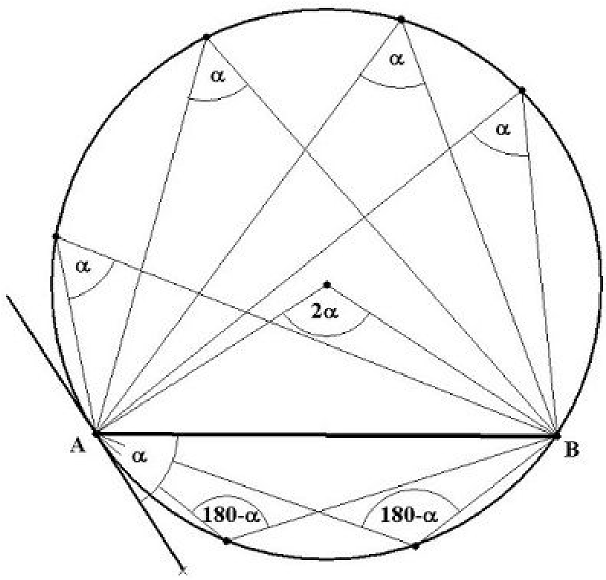
50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 19. Oktober 2018

Der Peripheriewinkelsatz (Randwinkelsatz):



- Peripheriewinkel die demselben Kreisbogen zugeordnet sind, sind gleich groß. Sie sind halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.
- Zwei Peripheriewinkel sind supplementär, wenn ihre Scheitel auf verschiedenen Kreisbogen b_1 und b_2 liegen, wobei b_1 und b_2 sich zu einem Kreis ergänzen.
- Der Peripheriewinkel über einer Sehne AB ist genau so groß wie der entsprechende Sehnen Tangentenwinkel in A bzw. B.

1. Ein Viereck $ABCD$ hat genau dann einen Umkreis, wenn gegenüberliegende Winkel supplementär sind.

   Ein Viereck mit Umkreis heißt **Sehnenviereck.**

2. Es sei ABC ein Dreieck mit dem Inkreismittelpunkt I. Die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC, AC und AB seien D, E und F. Der Schnittpunkt von CI mit EF sei P. Beweise, dass die Punkte B, I, P und F auf einem Kreis liegen.

3. Beweise, dass sich in jedem Dreieck jede Winkelsymmetrale mit der Streckensymmetrale der gegenüberliegenden Seite in einem Punkt schneidet, der auf dem Umkreis liegt.(**Südpolsatz.**)

4. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an den Seiten, so liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.

5. Es sei AD die (innere) Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt A des Dreiecks ABC mit D auf BC. Auf der Seite AC sei der Punkt E so gewählt dass $\overline{CE} = \overline{CD}$. Die Gerade DE schneidet die Winkelsymmetrale durch B in P.

   Beweise: $\overline{AP} = \overline{PD}$

6. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC in E. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC = \beta$ schneidet die Gerade DE im Punkt G.

   Zeige die Gerade AG steht normal auf BG.

7. Außerhalb des Quadrates $ABCD$ konstruieren wir über der Seite CD ein rechtwinkeliges Dreieck DCM mit dem rechten Winkel in M.

   Zeige, dass die Winkelsymmetrale in M das Quadrat in zwei kongruente Teile teilt.

8. Das spitzwinkelige Dreieck ABC hat den Umkreismittelpunkt O. Der Höhenfupunkt der Höhe durch A sei F. Ein Kreis mit dem Durchmesser AF schneidet die Seite AB in D und AC in E.

   Beweise: Die Gerade AO steht normal zur Geraden DE.

9. Es sei k der Umkreis des Quadrates $ABCD$ und N ein Punkt auf dem Bogen DC des Umkreises, der A (und B) nicht enthält. Die Gerade AN schneidet BD in P und DC in R. Die Gerade BN schneidet AC in Q und DC in S. Beweise: RQ steht normal auf PS. (Frankreich , Team Selection Test 2006)

10. Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S. Man zeige:

    (a) Die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.

    (b) Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC. (GWF 2016, K. Czakler)

11. Es seien k ein Kreis mit Radius r und AB eine Sehne von k mit $AB > r$. Weiters sei S jener Punkt auf der Sehne AB, für den $AS = r$ gilt. Die Streckensymmetrale von BS schneide den Kreis k in den Punkten C und D. Die Gerade durch die Punkte D und S schneide k in einem weiteren Punkt E.

    Man beweise, dass das Dreieck CSE gleichseitig ist. (GWF 2018, Stefan Leopoldseder)

12. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\angle ACB < 60°$. Wir bezeichnen den Inkreismittelpunkt und den Umkreismittelpunkt mit I bzw. U. Der Umkreis des Dreiecks BIU schneidet den Schenkel BC ein zweites Mal im Punkt D.

    (a) Man beweise, dass die Geraden AC und DI parallel sind.

    (b) Man beweise, dass die Geraden UD und IB aufeinander normal stehen. (GWF 2015, Walther Janous)

13. Bestimme in den folgenden Aufgaben jeweils die Größe des Winkels α.
    (Aus dem Buch "Mathematik-Olympiade für Anfänger" von Tom Ballik)