



MATHEMATIK

macht

FREU(N)DE

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

25. Oktober 2019

1. Zu Ehren des heutigen Datums ist folgende Frage zu beantworten: Wie viele natürliche Zahlen, die kleiner als 2019 sind, sind weder durch 25 noch durch 10 teilbar?
2. Wie viele Ziffern muss man schreiben, wenn man alle Zahlen von Aufgabe 1 anschreiben möchte?
3. Können zwei Personen drei (eventuell verschieden große) Stück Käse immer so aufteilen, dass jeder ein ganzes Stück bekommt, das dritte Stück geschickt geteilt wird und dann jeder gleich viel Käse hat?[4, Beispiel 3.10]
4. (Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger 2012) Ein Briefträger will n Pakete mit Gewichten $1, 2, 3, 4, \dots, n$ in drei genau gleich schwere Gruppen aufteilen. Kann ihm das gelingen, falls (a) $n = 2011$, (b) $n = 2012$ gilt?
5. Unter neun Münzen befindet sich genau eine falsche Münze, die leichter als die anderen ist, die alle gleich schwer sind. Wie viele Wägungen auf einer Balkenwaage sind mindestens notwendig, um die eine falsche Münze sicher finden zu können? [4, Beispiel 3.12]
6. (Neujahrswettbewerb am RG 18, 2017) In einer Wanne liegt eine Kugel mit der Nummer 1, zwei Kugeln mit der Nummer 2, drei Kugeln mit der Nummer 3, \dots , 2017 Kugeln mit der Nummer 2017.
Wie viele Kugeln muss man mindestens ziehen, um sicher zu sein, dass man 17 Kugeln mit gleicher Nummer gezogen hat?
7. In einem Nationalpark steht eine Baumgruppe von Mammutbäumen, die alle ein positives ganzzahliges Alter haben. Ihr Durchschnittsalter beträgt 41 Jahre. Nachdem ein 2010 Jahre alter Baum vom Blitz zerstört wird, sinkt das Durchschnittsalter auf 40 Jahre.
Wie viele Bäume waren ursprünglich in der Gruppe? Höchstens wie viele von ihnen waren genau 2010 Jahre alt? [3, Landeswettbewerb für Anf. 2010]
8. Anton schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 2 teilbar sind. Berta schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 3 teilbar sind. Clara schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 4 teilbar sind. Die ordnungsliebende Dora notiert die von den anderen aufgeschriebenen Zahlen. Dabei ordnet sie die Zahlen der Größe nach und schreibt keine Zahl mehrfach an.
Wie lautet die 2017. Zahl in ihrer Liste? [1, A 3]

9. (Neujahrswettbewerb am RG 18, 2016) Anlässlich der Feier zum Jahreswechsel denkt sich Claus eine achtstellige Zahl aus. Dann vertauscht er zwei ihrer Ziffern und erhält eine andere achtstellige Zahl. (Wie üblich, sind die Ziffern mit dem höchsten Stellenwert nicht 0.) Wenn er die beiden Zahlen addiert, so erhält er die schöne Zahl 20152016. Welche Zahl hat sich Claus ausgedacht? Man gebe alle Möglichkeiten an!
10. Wir legen fest, dass eine Umordnung der Buchstaben eines Wortes keine Fixbuchstaben hat, wenn man das Wort und das ungeordnete Wort direkt übereinander schreibt und dabei in keiner Spalte zwei gleiche Buchstaben stehen. Z.B. haben HELENA und ENALEH keine Fixbuchstaben, HELENA und LEANHE aber schon. (Die beiden E sollen nicht unterscheidbar sein.)
Man berechne, wie viele verschiedene Umordnungen ohne Fixbuchstaben es für das Wort HELENA gibt. [2]
11. Eine Firma hat ein fehlerhaftes Telefonsystem, das manchmal zwei benachbarte Ziffern vertauscht, wenn jemand eine Nebenstelle mit dreistelliger Nummer anwählt. Wenn jemand z.B. $x318$ anwählt, kann es sein, dass es bei $x318$ oder $x138$ oder $x381$ läutet, während ein Anruf von $x044$ bei $x044$ oder $x404$ landen kann. Statt das kostspielige System auszutauschen, verwendet die Firma einen Computer, der feststellen soll, welche Nummer fehlerhaft sein kann, und der diese Nummer in die richtige Form abändert. Damit das funktioniert, müssen sie natürlich eine Anzahl von Nebenstellennummern auslassen.
Was ist die größtmögliche Anzahl von dreistelligen Nebenstellennummern, die die Firma unter diesen Voraussetzungen verwenden kann? [2]
12. Die Buchstabenfolge $ABCD$ wird 55-mal hintereinander auf einen Streifen geschrieben: $ABCDABCDABCD \dots ABCD$. Dieser Streifen wird nun in Abschnitte (mit mindestens einem Buchstaben) zerschnitten.
Dadurch entstehen Wörter, z.B.: $A|BC|DABC|DAB|CDABCD \dots$ Ziel ist es, dass lauter verschiedene Wörter entstehen und möglichst viele.
Was ist die größte Anzahl an verschiedenen Wörtern, die auf diese Weise erzeugt werden können? [2]

Literatur

- [1] Junior-Regionalwettbewerb 2017. <https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/329>. (aufgerufen am 23.12.2019).
- [2] USA Mathematical Talent Search. <http://www.usamts.org>. (aufgerufen am 23.12.2019).
- [3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.

[4] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den JRW (Junior-Regionalwettbewerb). <https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/90>. (aufgerufen am 23.12.2019).