51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 8.November 2019

1. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$. Auf dem Bogen CA seines Umkreises, der B nicht enthält, liege ein Punkt P. Der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade AP werde mit E bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade BP werde mit F bezeichnet.

   Man beweise, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind.
   (Walther Janous)

2. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck und E und F die Fußpunkte der Höhen h_b und h_c. M sei der Mittelpunkt der Seite BC.

   - Zeige, dass ME und MF Tangenten an den Umkreis von AFE sind.
   - Zeige, dass die zu BC parallele Gerade durch den Punkt A ebenfalls eine Tangente des Umkreises von AFE ist.

3. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit $BC > CA$. Die Streckensymmetrale der Strecke AB schneide die Gerade BC in P und die Gerade CA in Q. Der Fußpunkt des von P auf die Gerade CA gefällten Lotes wird mit R, der Fußpunkt des von Q auf die Gerade BC gefällten Lotes wird mit S bezeichnet.

   Zeige, dass die Punkte R, S und der Mittelpunkt M der Strecke AB auf einer Geraden liegen.

4. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC in E. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC = \beta$ schneidet die Gerade DE im Punkt G.

   Bestimme den Winkel $\angle AGB$!

5. Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z beliebige Punkte auf AB, BC und CA. Man konstruiere einen Kreis durch A, X und Z, einen Kreis durch B, X und Y und jenen Kreis durch C, Y und Z, und zeige, dass diese sich in einem Punkt schneiden.

6. In einem gleichschenkeligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ sei H der Höhenschnittpunkt und O der Umkreismittelpunkt. Die Parallele zur Seite AC durch den Punkt H schneide die Seite BC im Punkt D.

   Zeige: BO steht normal zu OD.

7. Es seien k und l zwei Kreise, welche sich in A und B schneiden. Es sei P ein Punkt auf k, PA und PB schneiden l jeweils ein zweites Mal in Q bzw. R. Zeige: QR steht normal auf den Durchmesser von k, der P enthält.