



51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

13. Dezember 2019

1. Anton und Berta spielen am 13.12.2019 ein fröhliches Spiel. Sie vereinbaren die Startzahl 19 und folgende Regel: Anton beginnt und zählt wahlweise 12 oder 13 dazu. Dann zählt Berta 12 oder 13 dazu, dann wieder Anton, und so weiter. Wenn jemand 2019 erreicht, hat er oder sie gewonnen. Wird 2019 überschritten, endet das Spiel unentschieden. Wer von den beiden hat eine Taktik, mit der er oder sie gewinnen kann?
2. Alice spielt gegen Bob das 1, 2, 3 - Spiel, und das geht so: Alice wählt eine zweistellige natürliche Zahl, die keine Primzahl ist, als Startzahl. Bob addiert zu dieser Zahl 1, 2 oder 3. Erreicht er damit eine Primzahl, so hat er gewonnen. Wenn nicht, so addiert Alice zu seiner Zahl 1, 2 oder 3. Erreicht sie damit eine Primzahl, so hat sie gewonnen. Wenn nicht, so geht das Spiel so lange weiter, bis jemand eine Primzahl erreicht und damit gewonnen hat. Man bestimme alle Startzahlen, mit denen Alice gewinnt.
3. Auf einer Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 100. Alice darf in jedem Spielzug zwei Zahlen durch deren Summe ersetzen. Kann sie erreichen, dass am Schluss eine einzige ungerade Zahl auf der Tafel steht? [2, Beispiel 3.7]
4. Alice und Bob erzeugen gemeinsam eine Zahl mit 2019 Stellen, indem sie abwechselnd eine Ziffer an einer bestimmten Stelle festlegen, wobei Alice beginnt. Kann Alice immer erreichen, dass diese Zahl durch 30 teilbar ist?
[2, Beispiel 3.8, leicht abgeändert]
5. Anton und Bernd spielen folgendes Spiel:
Am Anfang wird auf ein Spielfeld ein regelmäßiges 2020-Eck gezeichnet. Ein Zug besteht darin, in das 2020-Eck eine Diagonale (=Verbindungsstrecke zweier nicht benachbarter Eckpunkte) einzuzeichnen. Die Spieler ziehen abwechselnd. Je zwei Diagonalen dürfen sich nicht schneiden. Derjenige, der die letzte Diagonale einzeichnet, gewinnt. Anton hat den ersten Zug.
Kann einer der beiden Spieler das Spiel gezielt gewinnen? Wenn ja, wer, mit welcher Strategie?
6. Anton und Bernhard spielen das 2015er-Spiel, und das geht so: Anton wählt eine der Zahlen 5, 9 oder 13, Bernhard wählt dann eine der beiden anderen. Anschließend addieren sie abwechselnd immer wieder 2015 zu ihrer Zahl. Gewonnen hat, wer zuerst eine Primzahl erreicht.
Wie sollen die beiden spielen?

7. An der Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 64$. Anna und Berta spielen folgendes Spiel: Anna beginnt, abwechselnd streichen sie je eine Zahl durch. Das tun sie so lange, bis nur mehr zwei Zahlen (a und b) an der Tafel stehen. Anna gewinnt, wenn a und b teilerfremd sind. Berta gewinnt, wenn $ggT(a, b) > 1$ gilt.
Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie? Wie lautet diese?
8. Anton und Berta spielen ein Kartenspiel. Sie haben $2n$ Karten und schreiben auf jede Karte eine positive Zahl. Die Karten werden gemischt und in einer Reihe mit der Zahl nach oben aufgelegt. Anton beginnt und wählt eine Karte an einem der beiden Enden. Dann nimmt Berta eine Karte von einem Ende, u.s.w., bis Berta die letzte Karte nimmt. Gewonnen hat, wer am Ende die größere Summe in den Karten hat.
Man zeige, dass es eine Gewinnstrategie für Anton gibt.
9. Das Spiel beginnt mit $n = 1$. A und B multiplizieren abwechselnd mit einer der Zahlen $2, 3, \dots, 9$. Gewinner ist, wer eine Zahl $n \geq 1000$ erreicht.
Wer gewinnt, A oder B?
10. Alice und Bob spielen ein Spiel mit einer Schnur, auf der 2015 Perlen aufgereiht sind. Wer am Zug ist, zerschneidet die Schnur zwischen zwei Perlen. Der oder die andere entscheidet, welches der beiden Stücke für den Rest des Spiels verwendet wird. Das andere Stück wird entfernt. Alice beginnt, danach wechseln sich die beiden mit dem Zerschneiden ab. Verloren hat, wer am Zug ist und nur eine einzige Perle vor sich hat, sodass kein Schnitt zwischen zwei Perlen mehr möglich ist.
Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie? [1, A 3]

Literatur

- [1] Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene 2015. <https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/96>. (aufgerufen am 23.12.2019).
- [2] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den RWF (Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene). <https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/89>. (aufgerufen am 23.12.2019).