51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen I - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 24. Jänner 2020

1. Man beweise, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, deren Ziffernsumme genau so groß wie ihr Ziffernprodukt ist.

2. Man bestimme alle Polygone mit ganzzahligen Innenwinkeln, deren Winkel sich wie $1 : 2 : 3 : \ldots$ verhalten. Wie groß kann der kleinste Winkel höchstens sein?

3. Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen n gilt: $0 < \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n^2+n} < 1$.

4. Für ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit der Basislänge c und der Schenkellänge a gilt: $\frac{a}{c} - \frac{c}{a} = 1$.

   Man berechne die Winkel des Dreiecks.

5. Sei x eine positive natürliche Zahl. Dann nennen wir einen Bruch der Form $\frac{1}{x}$ einen Stammbruch.

   a) Beweise: Jeder Stammbruch lässt sich als Summe von zwei Stammbrüchen anschreiben. Gib insbesondere an, wie man $\frac{1}{2019}$ und $\frac{1}{2020}$ als Summe von zwei Stammbrüchen schreiben kann!

   b) Für manche Stammbrüche gibt es verschiedene Möglichkeiten, sie als Summe von zwei Stammbrüchen anzuschreiben: Z.B. $\frac{1}{15} = \frac{1}{24} + \frac{1}{40}$ oder $\frac{1}{15} = \frac{1}{16} + \frac{1}{240}$. Gib einen Stammbruch an, bei dem es mehr als drei verschiedene Zerlegungen in eine Summe von zwei Stammbrüchen gibt! (Solche Zerlegungen nennen wir verschieden, wenn sie sich nicht nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden.)

   c) Gib den größten Stammbruch an, bei dem es drei verschiedene Zerlegungen in eine Summe von zwei Stammbrüchen gibt!

6. Für jede natürliche Zahl n sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n und $s(n)$ die Summe der positiven Teiler von n. Den Wert $m(n) = \frac{s(n)}{d(n)}$ nennen wir mittlere Teilergröße von n. ($m(n)$ muss kein Teiler von n sein.)

   Man beweise: Es gibt unendlich viele Zahlen n, für die gilt: $m(n) > \frac{n}{2}$. Welche Zahlen sind das?

   Man beweise: Es gibt genau eine Zahl n, für die gilt: $m(n) = \frac{n}{2}$. Welche Zahl ist das?

7. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die gilt: $\sqrt{s(n)} > \frac{n}{2}$.

8. a) Die natürlichen Zahlen n und $n+1$ seien nicht durch 3 teilbar. Wie viele durch 3 teilbare natürliche Zahlen liegen zwischen n^3 und $(n+1)^3$?

   b) Man bestimme alle natürlichen Zahlen m, für die gilt: Zwischen m^3 und $(m+1)^3$ liegt keine durch 2020 teilbare natürliche Zahl.

9. a) Die Folge (a_n) sei folgendermaßen definiert: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + x$, wenn diese Zahl keine Quadratzahl ist, sonst aber die Wurzel daraus.

   Man beweise, dass für $x = 10$ diese Folge nach oben unbeschränkt aber nicht streng monoton wachsend ist.

   b) Man gebe eine Zahl $x > 1$ so an, dass die in a) angegebene Zahlenfolge nach oben beschränkt ist.