



51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

13. März 2020

1. Es seien a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 4$. Man beweise:
 $a + bcd \leq 2$.
2. Am 6.3.2020 schreibt Georg alle positiven ganzen Zahlen an, die kleiner als 2020 sind und durch 3 aber nicht durch 6 teilbar sind.
 - (a) Wie viele Zahlen hat er angeschrieben, die das Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen sind?
 - (b) Wie viele Quadratzahlen hat er angeschrieben?
3. Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit $AD < AB$. Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AD und N der Mittelpunkt der Strecke BC . Der Punkt E sei der Fußpunkt des Lotes von B auf die Gerade CM .
 - (a) Man zeige, dass $ANEM$ ein gleichschenkeliges Trapez ist.
 - (b) Man zeige, dass die Fläche des Vierecks $ABNE$ halb so groß ist wie die Fläche des Rechtecks $ABCD$.
4. Man bestimme alle ganzen Zahlen x, y und z , für die $3^x + 6y = 2^z$ gilt.
5. Man beweise, dass für alle $x \geq 505$ die Ungleichung $x^3 - 509x^2 + 2024x \geq 2020$ gilt.
Für welche x gilt das Gleichheitszeichen?
6. Wenn man eine dreistellige natürliche Zahl zweimal hintereinander schreibt, so entsteht eine Zahl, die wir eine „sechsstellige Doppelzahl“ nennen.
Man bestimme die Anzahl aller sechsstelligen Doppelzahlen, die sich jeweils als Produkt von sieben paarweise verschiedenen Primzahlen schreiben lassen.
7. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl n , für die $2020 + 4 \cdot n^2$ durch 43 teilbar ist.