51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 18./25. Oktober 2019

Graphentheorie Grundlagen

1. Die Ritter an König Artus’ Tafelrunde sind teils befreundet, teils verfeindet. Jedoch hat jeder Ritter mehr Freunde als Feinde. Zeige, dass Artus seine Leute derart um die Tafel versammeln kann, dass keiner unmittelbar neben einem seiner Feinde sitzt. [1, Aufgabe 76]

2. Von neun Punkten in der Ebene liegen keine drei auf einer Geraden. Zwischen den Punkten werden nun die Verbindungsstrecken in den Farben blau und grün gezeichnet. Dabei enthält jedes Dreieck mindestens eine blaue Seite. Zeige, dass es vier Punkte gibt, sodass alle Verbindungsstrecken zwischen ihnen blau sind. [1, Aufgabe 77]

3. Sei G ein zusammenhängender Graph. Zeige, dass zwei Pfade maximaler Länger einen Knoten gemeinsam haben.

4. Zeige, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn er nur Zykel gerader Länge enthält.

5. Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer geraden Anzahl an Knoten. Zeige, dass man eine Menge an Kanten auswählen kann, sodass jeder Knoten eine ungerade Anzahl dieser Knoten berührt.

6. (Italien 2007) Sei n eine ungerade positive ganze Zahl. Es gibt n Computer und genau ein Kabel zwischen je zwei Computern. Man soll die Computer und die Kabel so färben, dass je zwei Computer nicht die selbe Farbe haben, und zwei Kabel, die mit dem selben Computer verbunden sind, nicht die selbe Farbe haben, und ein Computer und ein Kabel, das mit diesem Computer verbunden ist, nicht die selbe Farbe haben. Zeige, dass dies mit n Farben möglich ist.

Satz von Hall

7. (Kazakhstan 2003) Gegeben seien zwei quadratische Blätter Papier mit Fläche 2003. Jedes der Quadrate sei in 2003 Polygone der Fläche 1 zerlegt. (Die Zerlegungen können verschieden sein.) Dann werden die Blätter deckend übereinander gelegt. Zeige, dass 2003 Nadeln so auf dem Papier platzieren werden können, dass alle 4006 Polygone durchstochen werden.

8. In einem bipartiten Graph habe jeder Knoten gleichen Grad. Zeige, dass es ein perfektes Matching gibt.

9. (AMSP C3 2014) Sei n in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Betrachte ein 8x8 Schachbrett mit der Eigenschaft, dass in jeder Zeile und jeder Spalte eine Figur steht. Zeige dass man acht Figuren auswählen kann, sodass sich in jeder Spalte und jeder Zeile genau eine Figur befindet.

10. (Canada 2006) In einem rechteckigen $m \times n$ Raster sei in jedem Feld eine nicht negative reelle Zahl. In jeder Zeile und jeder Spalte gibt es mindestens einen positiven Eintrag. Falls sich eine Zeile und eine Spalte in einem positiven Eintrag schneiden so haben diese Zeile und diese Spalte die gleiche Summe. Zeige, dass$m = n$.

11. (Baltic Way 2013) Der Weihnachtsmann hat mindestens n Geschenke für n Kinder. Für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ wünscht sich das $i$te Kind $x_i > 0$ dieser Geschenke. Es sei

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Man beweise, dass der Weihnachtsmann jedem Kind ein von ihm gewünschtes Geschenk geben kann.

12. (AMSP C3 2014)

Eine $n \times n$ Tabelle sei mit 0 und 1 gefüllt, sodass wenn wir n Felder auswählen, von denen keine in der gleichen Zeile oder Spalte sind, immer in mindestens einem der ausgewählten Feldern 1 steht. Zeige, dass wir i Zeilen und j Spalten finden sodass $i + j \geq n + 1$ und in ihrem Schnitt nur 1er stehen.

13. (Team Competition 2012 Hall) Zeige: Bei jedem planaren Graphen können die Kanten so gerichtet werden, dass der Ausgangsgrad jedes Knotens maximal drei ist.

Gemischte Aufgaben

14. (APMO 2003) Seien m und n positive ganze Zahlen. Finde die kleinste positive ganze Zahl k, sodass unter k Leuten es immer m Paare von Leuten gibt, die sich gegenseitig kennen oder n Paare von Leuten, die sich gegenseitig nicht kennen.

15. (Russia 1980) Die Einwohner eines Dorfes erkranken an der Grippe. Eines Tages am morgen aßen manche von ihnen zu viel Eis und wurden krank; und nach diesem Tag ist der einzige Grund, weswegen eine gesunde Person krank wird, dass sie einen kranken Freund besucht hat. Jede Person im Dorf ist genau einen Tag lang krank und dann am nächsten Tag immun gegen den Grippevirus, sie kann dann nicht krank werden. Trotz der Pandemie besucht jeden Tag jede gesunde Person alle ihre kranken Freunde. Nachdem die Pandemie startet, wird niemand mehr geimpft.

    Beweise:

    (a) Falls manche Leute vor dem ersten Tag geimpft wurden und deswegen am ersten Tag immun waren, kann die Pandemie ewig dauern.

    (b) Falls niemand geimpft wurde, hört die Pandemie nach endlicher Zeit auf.

16. (Ungarn 1985) Auf einer Konferenz sind 1985 Teilnehmende. Unter drei Teilnehmenden sprechen immer mindestens zwei eine gemeinsame Sprache. Niemand auf der Konferenz spricht mehr als fünf Sprachen. Zeige, dass es eine Sprache gibt, die von mindestens 200 Leuten gesprochen wird.

17. (Russia 1961) In einem mxn Raster steht in jedem Quadrat eine reelle Zahle. Es ist erlaubt das Vorzeichen aller Zahlen in einer Zeile oder einer Spalte zu wechseln. Zeige, dass es möglich ist ein Raster zu erhalten, in dem alle Zeilen und Spaltensummen nicht negativ sind.

18. (Russia 1998) Ivan hat ein Kartendeck, dass aus 52 Karten besteht. Es gibt vier Farben und von jeder Farbe genau 13 Karten. Ivan zieht nacheinander ohne zurücklegen alle Karten des Decks. Bevor dem Ziehen jeder Karte rät er die Farbe der Karte. Er rät immer eine der Farben, die am häufigsten im verbleibenden Deck sind. Beweise, dass er mindestens 13 Mal richtig rät.

19. (Russia 1998) Zwei verschiedene positive ganze Zahlen a und b werden an eine Tafel geschrieben. Die kleinere wird gelöscht und durch $\frac{ab}{|a-b|}$ ersetzt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis die Zahlen gleich sind. Zeige, dass der Vorgang in endlicher Zeit abbricht.

20. (Russia 1998) Ein $n \times n$ Raster sei gegeben in dem in n-1 Quadraten ein 1er eingetragen ist und sonst immer Null. Es ist erlaubt ein Quadrat auszuwählen, von der Zahl in dem

Quadrat 1 abzuziehen, und allen Zahlen in der gleichen Zeile und Spalte 1 hinzuzufügen (also wird $2n - 2$ Quadraten 1 hinzugefügt). Ist es möglich ein Raster zu erhalten in dem alle Zahlen gleich sind?

Literatur

[1] Stefan Wagner. Skriptum Kombinatorik. `https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/398`. (aufgerufen am 23.12.2019).