51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 29. November 2019

Zahlentheorie

1. Es seien $m \geq 2$ und a ganze Zahlen. a heißt *quadratischer Rest*(QR) modulo m, wenn es eine ganze Zahl x gibt, sodass die Kongruenz
$$x^2 \equiv a \pmod{m}$$
erfüllt ist. Andernfalls heißt a *quadratischer Nichtrest*(QNR).
Wie viele QR bzw. QNR modulo p gibt es, wenn p eine Primzahl ist?

2. Sei p eine Primzahl. Zeige: Das Produkt ab mit $a, b \neq 0$ ist genau dann ein QR modulo p wenn entweder a und b QR sind, oder wenn beide QNR sind.

3. Die Eulersche Phi-Funktion $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ gibt für jede positive natürliche Zahl n an, wie viele zu n teilerfremde natürliche Zahlen es gibt, die nicht größer als n sind. Zeige, dass
$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$
gilt wenn $\operatorname{ggT}(a, m) = 1$. (Satz von Euler-Fermat)

4. Zeige, dass -1 genau dann ein QR modulo p ist, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ oder $p = 2$.

5. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen kongruent 1 modulo 4 gibt.

6. Als Ordnung von a modulo m (geschrieben $\operatorname{ord}_m(a)$) wird die kleinste positive ganze Zahl k bezeichnet, sodass
$$a^k \equiv 1 \pmod{m}$$
gilt. Zeige: [5, Satz 5.1]
a) $\operatorname{ord}_m(a) | \varphi(m)$
b) $a^i \equiv a^j \pmod{m}$ genau dann wenn $i \equiv j \pmod{\operatorname{ord}_m(a)}$
c) $a^k \equiv 1 \pmod{m}$ genau dann wenn $\operatorname{ord}_m(a) | k$

7. Man bestimme die Anzahl der natürlichen Zahlen $N < 1000000 = 10^6$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt einen ganzzahligen Exponenten k mit $1 \leq k \leq 43$, sodass 2012 ein Teiler von $N^k - 1$ ist. [3, BF 2012, A 5]

8. Es sei p eine Primzahl und n eine positive ganze Zahl. Wie viele Werte kann $a^n \pmod p$ annehmen?

9. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen kongruent 1 mod 17 gibt.

10. Sei p eine Primzahl und b, n positive ganze Zahlen wobei $\operatorname{ggT}(n, p-1) = 1$ gilt. Zeige, dass es ein a gibt, sodass
$$a^n \equiv b \pmod p$$
gilt.

11. Zeige, dass es keine ganzzahligen Lösungen zu $y^2 = x^5 - 4$ gibt. [1, A4]

12. Zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen a, b, n mit $n > 1$
$$\operatorname{ggT}(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\operatorname{ggT}(a,b)} - 1$$
gilt. [4, S.147, Problem 38]

13. Zeige, dass die Gleichung
$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$$
keine ganzzahligen Lösungen besitzt. [2, N5]

Literatur

[1] Balkan Mathematical Olympiad 1998.

[2] IMO Shortlist 2006. `https://www.imo-official.org/problems/IMO2006SL.pdf`. (aufgerufen am 23.12.2019).

[3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.

[4] Ronald L. Graham et al. *Concrete Mathematics.* Addison Wesley, 1994.

[5] Clemens Heuberger. Zahlentheorie. `https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/18`. (aufgerufen am 23.12.2019).