



## 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

14. Februar 2020

### Algebra und Geometrie

1. Bestimme alle reellen Zahlen  $x$  und  $y$ , die Lösungen der beiden Gleichungen  $x^2 + xy - y^2 = -1$  und  $4x^2 + xy - 11y^2 = -2$  sind. [1, 2019]
2. Gegeben ist ein Trapez  $ABCD$  mit spitzem Winkel  $\angle ABC$ . Sei  $O$  der Umkreismittelpunkt von  $\triangle ABC$ , und  $E$  der Schnittpunkt von  $OB$  und  $CD$ . Es gilt  $\angle DBC = \angle CEB + 10^\circ$ .

Bestimme den Winkel, den die beiden Diagonalen des Trapezes miteinander einschließen. [1, 2019]

3. Bestimme alle reellen Zahlen  $x$ , die der Gleichung  $(x - 1009)^3 + (2x - 1009)^3 + (2018 - 3x)^3 = 0$  genügen. [1, 2019]
4. Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ . Die Strecken  $BD$  und  $CE$  sind zwei der Höhen des Dreiecks.

Bestimme den kleinsten möglichen Winkel  $\angle BAC$ , so dass

$$|AE| \cdot |AD| = |BE| \cdot |CD|$$

gelten kann. [1, 2019]

5. Die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_{41}$  bilden eine arithmetische Folge mit  $a_1 = 1$ . Der Wert der Summe  $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{40}} + \sqrt{a_{41}}}$  ist eine natürliche Zahl. Wir wissen weiters, dass die Differenz der Folge (d.h. die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder) ebenfalls eine natürliche Zahl ist.

Bestimme die Differenz der Folge. [1]

6. Die reellen Zahlen  $x$  und  $y$  erfüllen die Gleichungen  $x + 4 = (y - 2)^2$  und  $y + 4 = (x - 2)^2$ . Bestimme  $x^2 + y^2$ . [1, 2018]

7. Im Rechteck  $ABCD$  mit  $|AB| : |AD| = 2 : 3$  ist  $E$  ein Punkt auf der Seite  $AD$  mit  $AE = AB$ . Der Punkt  $F$  auf der Geraden  $AB$  ist so gewählt, dass die Flächen des Dreiecks  $AFE$  und des Vierecks  $CDEF$  gleich sind.

Bestimme  $|AB| : |BF|$ . [1, 2018]

8. Finde alle reellen Zahlen  $a$ , sodass die Gleichung

$$x^2 - (5 - a)x + a^2 - 11a - 46 = 0$$

zwei reelle Lösungen hat, wobei eine Lösung größer und eine Lösung kleiner als 2 ist. [1, 2018]

9.  $AB$  und  $CD$  sind die Durchmesser des Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $S$  und  $\angle BAD = 28^\circ$ . Der Kreis mit dem Mittelpunkt  $a$ , der durch den Punkt  $S$  geht, schneidet den Kreis  $k$  in den Punkten  $E$  und  $F$ , wobei  $D$  und  $F$  auf der gleichen Seite der Geraden  $AB$  liegen. Bestimme den Winkel  $\angle CFS$ . [1, 2018]

## Literatur

- [1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm>. (aufgerufen am 17.2.2020).