



## 50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“

1. März 2019

- Schreibt man die Ziffer Neun 2019 mal hintereinander, so erhält man die Zahl  $z$ .
  - Man ermittle die Ziffernsumme der Zahl  $z^3$ .
  - Wie viele ganze Zahlen  $x$  mit  $|x| < 2019$  gibt es, für die  $(z - x)^2$  durch 9 teilbar ist?
- Wir nennen eine natürliche Zahl  $n > 1$  eine “ schöne Zahl ”, wenn sie folgende beiden Eigenschaften hat:
  - Dividiert man  $n$  durch die kleinste Primzahl, die Teiler von  $n$  ist, so erhält man das Quadrat einer Primzahl.
  - Dividiert man  $n$  durch die größte Primzahl, die Teiler von  $n$  ist, so erhält man ebenfalls das Quadrat einer Primzahl.

Man bestimme alle schönen Zahlen, die kleiner als 2019 sind.

- $a$  und  $b$  seien positive ganze Zahlen mit  $a \neq b$ . Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen  $k$ , für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}kgV(a, b) &= \frac{ab}{a-b} \\ggT(a, b) &= \frac{2016}{k(a-b)}\end{aligned}$$

Lösungen hat.

- Man bestimme alle Primzahlen  $p$ , für die  $2016^{p-1} = p^{11} - p^5$  gilt.
- Die Zahlenfolgen  $(x_n)$  und  $(y_n)$  sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, y_1 = -1, \\x_{n+1} &= 13x_n - 4y_n \text{ und } y_{n+1} = -15x_n + 6y_n \text{ für } n > 0.\end{aligned}$$

Man berechne  $20 \cdot x_{2016} + 16 \cdot y_{2016}$ .

- Man bestimme alle Jahreszahlen unseres Jahrtausends, die genau  $n$  Teiler haben und durch  $n$  teilbar sind, a) für  $n = 15$ , b) für  $n = 16$ .
- An der Tafel stehen einige paarweise verschiedene zweistellige natürliche Zahlen. Diese werden schrittweise verändert. Ein Schritt besteht darin, dass eine Zahl, die nicht gleich 1 ist, gelöscht wird und an ihrer Stelle jene Zahl geschrieben wird, die man erhält, wenn man die gelöschte Zahl durch ihren größten Primteiler dividiert. Nach 32 Schritten stehen Zahlen an der Tafel, deren Summe 6 beträgt.

Wie groß war die Summe der Zahlen, die zu Beginn an der Tafel standen?

8. Anlässlich der Feier zum Jahreswechsel denkt sich Claus eine achtstellige Zahl aus. Dann vertauscht er zwei ihrer Ziffern und erhält eine andere achtstellige Zahl. (Wie üblich, sind die Ziffern mit dem höchsten Stellenwert nicht 0.) Wenn er die beiden Zahlen addiert, so erhält er die schöne Zahl 20152016.

Welche Zahl hat sich Claus ausgedacht? Man gebe alle Möglichkeiten an!

9. Gegeben sind beiden Funktionen

$$f(x, y) = 20x^2 + 16x - 55y^2 + 24y + 2015 \text{ und}$$
$$g(x, y) = 15x^2 + 25x + 20y^2 + 15y + 2016.$$

Anlässlich des Jahreswechsels berechne man  $f(2015, 2016) + g(2016, 2015)$ .

10. Eine Polizeinotrufzahl sei eine positive ganze Zahl, die im Dezimalsystem auf die Ziffern 133 endet.

Man beweise, dass jede Polizeinotrufzahl einen Primteiler größer als 7 besitzt.

(Bundeswettbewerb 2015, Teil 1)