50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“ 5. Oktober 2018

Sei m eine natürliche Zahl größer als 1. Dann nennen wir die Menge aller ganzen Zahlen, die bei Division durch m den Rest r haben **„ Restklasse r modulo m ”**.
Z.B. sind die geraden Zahlen die Restklasse 0 modulo 2 und die ungeraden Zahlen die Restklasse 1 modulo 2.
Z.B. ist die Restklasse 3 modulo 4 die Menge $\{\ \ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$
Modulo m gibt es m verschiedene Restklassen, die üblicherweise nach dem Rest benannt werden, also die Restklassen $0, 1, 2, \ldots, m-1$.
Wenn zwei ganze Zahlen a und b in der selben Restklasse modulo m liegen, so schreiben wir $a \equiv b$ mod. m (**„a ist kongruent b modulo m.”**)
Es gilt: $a \equiv b$ mod. m genau dann, wenn $a - b$ durch m teilbar ist.
Es gilt: $a \equiv b$ mod. m genau dann, wenn es eine ganze Zahl t gibt, sodass $a = b + t \cdot m$ gilt.
Es gilt: Aus $a \equiv b$ mod. m und $b \equiv c$ mod. m folgt $a \equiv c$ mod. m.
Es gilt: Aus $a \equiv b$ mod. m und $c \equiv d$ mod. m folgt $a + c \equiv b + d$ mod. m, $a - c \equiv b - d$ mod. m und $a \cdot c \equiv b \cdot d$ mod. m.
Es gilt: Aus $a \cdot c \equiv b \cdot c$ mod. m und $ggT(c, m) = 1$ folgt $a \equiv b$ mod. m.

1. Man bestimme alle natürlichen Zahlen x, für die $-x^2 + 2020x - 2019$ eine Primzahl ist.

2. Alice und Bob beschließen, eine 2018-stellige Zahl im Dezimalsystem ziffernweise von links nach rechts festzulegen, wobei Alice beginnt und die beiden sich abwechseln. Dabei soll folgende Regel gelten: Jede neu genannte Ziffer soll in einer anderen Restklasse modulo 3 liegen als die unmittelbar davor genannte.

   Da Bob die letzte Ziffer angeben darf, wettet er, dass es ihm gelingt, dass die Zahl am Ende durch 3 teilbar ist. Kann Alice das verhindern?

   (Bundeswettbewerb 2018, Richard Henner)

3. Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, sodass $\frac{3x^2+4}{10y^2}$ eine ganze Zahl ist.

4. Man zeige, dass die Zahl $z(n) = 9^n + 8^n + 7^n + 6^n - 4^n - 3^n - 2^n - 1^n$ für alle nicht negativen ganzen Zahlen n durch 10 teilbar ist.

5. Man bestimme die Einerziffer der Zahl $2^{3^{2019}}$.

6. Man beweise, dass die Zahlen 2019^2 und 7981^2 in den letzten vier Stellen übereinstimmen.

7. Man beweise, dass $2^{36} - 2^{19} + 1$ durch 361 teilbar ist.

8. Man beweise: Wenn p eine Primzahl ist und $ggT(k,p) = 1$ gilt, dann gilt $k^{p-1} \equiv 1$ mod. p. (Kleiner Satz von Fermat)

9. Prove: If $n > 1$ then $n^4 + 4^n$ is never a prime.

10. Is $4^{545} + 545^4$ a prime?

11. If $n \geq 0$ then $f(n) = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ has at least n different prime factors.

12. Find all primes of the form $n^n + 1$, which are less then 10^{19}.

13. Can the number A consisting of 600 sixes and some zeros be a square?

14. The equation $15x^2 - 7y^2 = 9$ has no integer solutions.

Die Aufgaben 9 bis 14 stammen aus dem Buch von Arhur Engel "Problem-Solving Strategies".