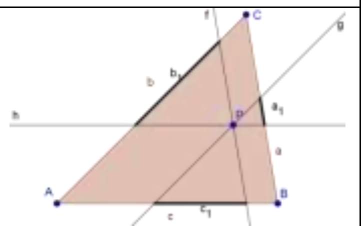
50. Österreichische Mathematik-Olympiade

7.Dezember 2018

Vorbereitungskurs (**F**) „Mathematik macht Freu(n)de“ F_2018_12_07

1.) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist gegeben durch $a_1 = 3$; $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Zeige, dass unendlich viele Glieder der Folge durch drei teilbar sind. Ermittle auch ein explizites Bildungsgesetz von a_n.	
2.) Eine Folge $\langle x_n \rangle$ für n = 1; 2; 3; … reeller Zahlen mit $x_1=0$ und $x_{n+1} = \sqrt{4+3x_n}$ ist gegeben. Zeige, dass $x_{2018} <4$ gilt.	
3.) Gegeben ist die Folge $\langle a_n \rangle = \langle 1; 1; \dots . \rangle$ mit $a_{n+2} = a_n.a_{n+1} +1$. Zeige, dass a_{2018} nicht durch 4 teilbar ist.	
4.) Zeige, dass $n^4 + 98n^2$ für keine natürliche Zahl n vierte Potenz einer ganzen Zahl ist.	GW 1998
5.) Löse in den ganzen Zahlen: $xy^2 -xy -2x -2y^2 +2y +4 = 0$	EB
6.) Löse in den reellen Zahlen $2x^2y -3x^3 -8y +12x = 0$	EB
7.) Löse in den ganzen Zahlen $x^2 + x^2y^2 + 4x - 2xy +4 = 0$	EB
8.) a) Zeige, dass die Gleichung $x^3 + 125 = y^3$ keine Lösung in den positiven ganzen Zahlen besitzt. *b) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung in den ganzen Zahlen?*	eig. F-Wett. 2008_09
9.) In einem beliebigen Punkt P im Inneren des Dreiecks ABC werden die Parallelen zu den Seiten a, b, c gelegt. Die entsprechenden Abschnitte auf den Seiten seien a´, b´, c´. Zeige: $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1$ P2010 Oly 9	
10.) Man bestimme alle Tripel reeller Zahlen (x; y; z), die folgendes Gleichungssystem erfüllen: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $x^3 + y^3 + z^3 = 1$	