50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 10.Mai 2019

1. Es sei ABC ein Dreieck und I sein Inkreismittelpunkt. Der Kreis durch A, C und I schneide die Gaerade BC ein zweites Mal im Punkt X, der Kreis durch B, C und I schneide die Gerade AC ein zweites Mal im Punkt Y.

   Man zeige, dass die Strecken AY und BX gleich lang sind.

   (Bundeswettbewerb -Vorrunde 2019, Theresia Eisenkölbl)

2. Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Ariane und Bérénice spielen ein Spiel auf der Menge der Restklassen modulo n. Zu Beginn steht auf einem Zettel die Restklasse 1. In jedem Spielzug ersetzt die Spielerin, die am Zug ist, die aktuelle Restklasse x entweder durch $x+1$ oder durch $2x$. Die beiden Spielerinnen wechseln sich ab, wobei Ariane beginnt.

   Ariane hat gewonnen, wenn im Laufe des Spiels die Restklasse 0 erreicht wird. Bérénice hat gewonnen, wenn sie das dauerhaft verhindern kann.

   Man bestimme in Abhängigkeit von n, wer von beiden eine Gewinnstrategie hat.

   (Bundeswettbewerb -Vorrunde 2019, Theresia Eisenkölbl)

3. Man bestimme alle Paare (a, b) reeller Zahlen, sodass

   $$a \cdot \lfloor b \cdot n \rfloor = b \cdot \lfloor a \cdot n \rfloor$$

   für alle positiven ganzen Zahlen n gilt.

   (Für eine reelle Zahl x bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.)

   (Bundeswettbewerb -Vorrunde 2019, Walther Janous)

4. Wie viele ganzzahlige Lösungen $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ hat die Gleichung

   $$2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 9?$$

   (Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 2009, Gerd Baron)

5. Es seien a, b reelle Zahlen mit $0 \leq a,\ b \leq 1$.

   Man zeige: $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)} \leq 1$.

   (Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 2010, Gerd Baron)