50. Österreichische Mathematik-Olympiade

12.Oktober 2018

Vorbereitungskurs (**F**) „Mathematik macht Freu(n)de“

F_2018_10_12

1.) Löse in den ganzen Zahlen $\mathbf{x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)}$	A.Engel ProblemSolving Strategies S43/E9
2.) In einem Koordinatensystem sind alle Gitterpunkte mit einer Nummer (= natürliche Zahl) versehen (*gleiche Nummern für verschiedene Gitterpunkte sind zulässig*) und zwar derart, dass die Nummer jedes Gitterpunktes mit dem Mittelwert (arithm. Mittel) seiner 4 Nachbarn übereinstimmt. Zeige, dass alle Gitterpunkte dieselbe Nummer haben. *Hinweis: Gitterpunkte sind Punkte der Zeichenebene, mit ganzzahligen Koordinaten.*	P-S-Str. S43/E8
3.) Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist gegeben durch: $\mathbf{a_{n+2} = a_n + a_{n+1}}$ mit $\mathbf{a_1 = 1; a_2 = 1}$ a) Gib ein explizites Bildungsgesetz an. b) Zeige, dass $a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots.\ a_n{}^2 = a_n \cdot a_{n+1}$ $\langle a_n \rangle$ …. *Fibonacci - Folge*	
4.) Löse in den ganzen Zahlen $\mathbf{4x^2 - y^2 = 7}$	
5.) Zeige (ohne TR), dass $\mathbf{x} = \sqrt[3]{\mathbf{20 - 14\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{\mathbf{20 + 14\sqrt{2}}}$ eine rationale Zahl ist.	Herman;Kucera;Simsa Equation&Inequalities S34/3.25
6.) Zeige: Hat ein normiertes Polynom (3.Grades) $\mathbf{P_3(x) = x^3 + a_2.x^2 + a_1.x + a_0}$ eine rationale Nullstelle (*Nullstelle = Lösung der Gleichung P(x) = 0*), so ist diese sogar ganzzahlig und Teiler des konstanten Gliedes a_0.	
7.) In wie viele Bereiche teilen n Gerade die Zeichenebene?	P. S. Str. S40/E1
8.) Finde einen geschlossenen Term für die Summe $\mathbf{Sn = 1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2}$	
9.) Zeige, dass die Gleichung $\mathbf{x^2 - 3y^2 = 1}$ mindestens 2018 Lösungen in den ganzen Zahlen besitzt.	
10.) Alex steigt auf eine Leiter. Während er dies tut, überlegt er, welchen Weg der Mittelpunkt M der Leiter nimmt, wenn die Leiter im Punkt A wegrutscht. Auf welcher Kurve bewegt sich der Punkt M?	
11.) Löse in R: $[x]^2 + [x] = x^2 - \frac{1}{4}$	LW 2007