50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“ 14. September 2018

1. Bestimme alle Paare (p, q) von Primzahlen, für die gilt
$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

2. Es seien x, y, z positive reelle Zahlen, mit $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Bestimme das Minimum von
$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$$

3. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die $2^{n-1}n + 1$ eine Quadratzahl ist.

4. Es sei $ABCD$ ein Quadrat und E ein Punkt auf der Diagonale BD. P und Q seien die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ABE und ADE.
Beweise, dass $APEQ$ ein Quadrat ist.

5. Bestimme alle Paare (p, q) von Primzahlen, mit
$$p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q$$

6. Auf der Seite BC eines Dreiecks ABC liegt der Punkt F. D sei der Mittekpunkt der Strecke AC. AF schneide die Gerade BD im Punkt E derart, dass $\overline{AE} = \overline{BC}$.
Zeige: $\overline{BF} = \overline{FE}$.

7. Gegeben sei ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel im Eckpunkt C. Der Halbierungspunkt der Schwerlinie BD sei E. Die Gerade CE schneide die Seite AB im Punkt S.
Beweise, dass $\overline{AS} = 2\overline{BS}$.

8. Gegeben sei ein spitzwinkeliges Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt O. Die Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt A schneidet die Seite BC im Punkt D. Die Normale auf AD durch B schneidet den Umkreis des Dreiecks ABD in B und E.
Beweise, dass die Punkte A, O und E auf einer Geraden liegen.

9. Determine all positive integers n for which $n(n+9)$ is a perfect square.

10. Es seien x, y, z reelle Zahlen für die gilt $0 \leq x, y, z \leq \frac{1}{2}$. Bestimme das Maximum von
$$x + y + z - xy - yz - zx$$