50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“ 18. Jänner 2019

1. Anlässlich des Jahreswechsels bestimme man alle natürlichen Zahlen x und y, für die gilt: $18x^2 + 19y = 2018 \cdot 19$.

2. Sei n eine positive ganze Zahl und $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n.

   Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die gilt: $d(n) + d(2019 \cdot n) < 10$.

3. Wir nennen eine poitive ganze Zahl “schön ”, wenn sie genau vier positive Teiler hat. 2019 ist z.B. eine schöne Zahl, weil 2019 die Teiler 1, 3, 673 und 2019 hat. Wir nennen eine posivie ganze Zahl “besonders schön ”, wenn sie genau vier positive Teiler hat und die Summe ihrer Teiler durch einen der Teiler größer als 1 teilbar ist.

   Man bestimme die größte besonders schöne Zahl, die kleiner, und die kleinste besonders schöne Zahl, die größer als 2019 ist.

4. Man bestimme alle Paare von ganzen Zahlen x und y, für die gilt: $6x^2+12x+7 = y^3-x^3$.

5. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sind paarweise verschiedene Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \cdots, 19\}$ und für s gilt: $s = a_1^2 + a_2^2 + \cdot + a_n^2 \leq 20 \cdot 19$.

   Gesucht ist für das größtmögliche s das kleinstmögliche n.

   Man finde alle Lösungen für dieses gesuchte n.

6. Für alle reellen Zahlen x und y gilt $2x^2 + 2xy + y^2 + 90,5 \geq 20x + 19y$.

   Man bestimme alle Paare (x, y), für die das Gleichheitszeichen gilt.

7. Die beiden Kreise $k_1(M_1, r_1)$ und $k_2(M_2, r_2)$ berühren einander von außen. A liegt auf k_1 und der Winkel $\angle M_2M_1A$ beträgt 60 Grad. Die Tangente durch A berührt auch k_2.

   Wie lang ist der Radius r_1, wenn $r_2 = 2019$ ist?

(Alle Aufgaben stammen vom Neujahrswettbewerb 2019 vom BRG Wien 18.)