50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 21. Dezember 2018

1. Beweise. dass für alle positiven reellen Zahlen gilt:
$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+4b}$$

2. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC in E. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC = \beta$ schneidet die Gerade DE im Punkt G.

   Bestimme den Winkel $\angle AGB$!

3. In einem konvexen Viereck $ABCD$ sei $\angle BCD = 90°$ und E der Halbierungspunkt der Seite AB.
   Beweise: $2EC \leq AD + BD$.

4. Das Produkt von drei positiven reellen Zahlen sei 1. Die Summe dieser drei Zahlen sei größer als die Summe ihrer Kehrwerte. Beweise, dass genau eine dieser Zahlen größer als 1 ist.

5. Man zeige: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem Inkreisradius mal dem halben Umfang.

6. Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z beliebige Punkte auf AB, BC und CA. Man konstruiere einen Kreis durch A, X und Z, einen Kreis durch B, X und Y und jenen Kreis durch C, Y und Z, und zeige, dass diese sich in einem Punkt schneiden.

7. Es seien k und l zwei Kreise, welche sich in A und B schneiden. Es sei P ein Punkt auf k, PA und PB schneiden l jeweils ein zweites Mal in Q bzw. R. Zeige: QR steht normal auf den Durchmesser von k, der P enthält.

8. In einem gleichschenkeligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ sei H der Höhenschnittpunkt und O der Umkreismittelpunkt. Die Parallele zur Seite AC durch den Punkt H schneide die Seite BC im Punkt D.

   Zeige: BO steht normal zu OD.

9. Wir betrachten alle Dreiecke ABC mit der gegebenen Seite $AB = c$ und der gegebenen Höhe h_c durch den Eckpunkt C. Für welche dieser Dreiecke ist das Produkt ihrer Höhen ein Maximum?

10. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Beweise:
$$a+b+c \geq \frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}$$