50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 25. Jänner 2019

1. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit den Umkreismittelpunkt O. P sei ein beliebiger Punkt auf AB und D bzw. E seien die Fußpunkte der Lote von P auf BC bzw. AC. Beweise, dass OP die Strecke DE halbiert.

2. Drei Kreise mit denselben Radius haben den Punkt M gemeinsam und schneiden sich paarweise in den Punkten A, B, C. Beweise, dass M der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist. (JBMO Shortlist)

3. Gegeben sei ein spitzwinkeliges Dreieck ABC mit $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Es seien M der Mittelpunkt von BC, H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, N der Mittelpunkt der Strecke AH und O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCH.

   Beweise, dass das Viereck $NAMO$ ein Parallelogramm ist.

4. Man betimme alle reellen Zahlen x. die folgende Ungleichung erfüllen:

   $$|x^2 - 4x + 1| > |x^2 - 4x + 5|$$

   (LWA 2002, Gerd Baron)

5. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis k, AB ist kein Durchmesser. C ist der Schnittpunkt der Tangenten in A bzw. B. Zeige, dass der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf k liegt.

6. Zeige, dass für alle reellen Zahlen a gilt: $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$

7. Es seien a und b reelle Zahlen mit $ab = 1$. Man bestimme die größte Zahl C, sodass

   $$(a - 2)^2 + (b - 2)^2 \geq C$$

   unabhängig von a und b erfüllt ist.

8. Es seien x, y reelle Zahlen mit $x + y \neq 0$. Beweise:

   $$x^2 + y^2 + \frac{8}{(x + y)^2} \geq 4$$

   . Wann gilt Gleichheit?

9. (Irland 2000) Es seien x, y nicht negative reelle Zahlen mit $x + y = 2$. Beweise:

   $$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2$$