# 50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“ 28. September 2018

1. Der Mittelwert aller positiven Teiler von 2019 ist um 1 größer als der größte echte Teiler von 2019. Man zeige, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die diese Eigenschaft haben.

2. Man beweise: Wenn für zwei natürliche Zahlen ($a$ und $b$) $a^2 + b^2 = 2019$ gilt, dann ist 19 ein Teiler von $a + b$.

3. Man beweise: Wenn für zwei natürliche Zahlen ($a$ und $b$) $20a^2 + 19b^2 \leq 2019$ gilt, dann gilt $10a + b \leq 101$.

4. Natürliche Zahlen mit genau vier positiven Teilern nennen wir 4T-Zahlen. 2018 und 2019 sind zwei aufeinander folgende 4T-Zahlen. Gibt es auch mehr als zwei aufeinander folgende 4T-Zahlen? Wie viele höchstens?

5. Man beweise, dass die Gleichung $20x^2 + 19y^2 = 2018 \cdot 2019$ keine ganzzahligen Lösungen hat.

6. Die Ziffernsumme von 2019 hat 6 Teiler. Man suche alle kleineren vierstelligen Zahlen, deren Ziffernsumme mehr Teiler hat.

7. Für welche natürlichen Zahlen $n > 1$ lässt sich 2019 als Summe von $n$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen?

8. Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die genau 2019 positive Teiler haben? Man bestimme die drei kleinsten Zahlen, die genau 2019 positive Teiler haben.

9. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $x$, für die $-x^2 + 2020x - 2019$ eine Primzahl ist.

10. Alice und Bob beschließen, eine 2018-stellige Zahl im Dezimalsystem ziffernweise von links nach rechts festzulegen, wobei Alice beginnt und die beiden sich abwechseln. Dabei soll folgende Regel gelten: Jede neu genannte Ziffer soll in einer anderen Restklasse modulo 3 liegen als die unmittelbar davor genannte.

    Da Bob die letzte Ziffer angeben darf, wettet er, dass es ihm gelingt, dass die Zahl am Ende durch 3 teilbar ist. Kann Alice das verhindern?

    (Bundeswettbewerb 2018, Richard Henner)