50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 30. November 2018

1. Es seien v, x positie reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{(x+y)^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}$$

2. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung

$$(a+2)(b+2) \geq cd$$

gilt, und man gebe vier Zahlen a, b, c und d an, für die Gleichheit gilt.

(Walther Janous, GWF 2015)

3. Gegeben seien sieben reelle Zahlen aus dem Intervall $]1; 13[$. Beweise, dass mindestens drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.

4. Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und zueinander normalen Diagonalen. Beweise:

$$AD \cdot BC \geq AB \cdot CD$$

5. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$

Wann gilt Gleichheit? (Walther Janous, LWA 2018)

6. Man zeige oder widerlege für reelle $a; b$ mit $a + b > 2$:

$$a^2 + b^2 \geq a + b$$

7. Man zeige für reelle $a; b; c$ mit $a^2 + 2bc = 1$:

$$1 \leq (a^2 + 2b^2)(a^2 + 2c^2)$$

8. Man zeige für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 1$:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$$

9. Für welche positiven ganzen Zahlen n gilt

$$2^n > 10n^2 - 60n + 80?$$

.