



50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“

15. März 2019

Kurswettbewerb für Fortgeschrittene

1. Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, sodass $3x^2 + y^2 = 777777$ gilt.

2. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$. Der Inkreis mit dem Mittelpunkt I berührt die Seite BC in D und die Seite AC in E . Der Schnittpunkt von AD mit BE sei S . Der Schnittpunkt von AD mit dem Inkreis sei $P (\neq D)$.

Beweise, dass die Punkte P, I, S und E auf einem Kreis liegen.

3. Es seien a, b positive reelle Zahlen mit $a + b = 1$. Beweise:

$$2 < \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right) \leq \frac{9}{4}.$$

Wann gilt (bei der rechten Ungleichung) Gleichheit?

4. Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist gegeben durch $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ für $n \geq 0$.

Welche Quadratzahlen enthält die Folge, wenn $a_0 = 2019$ ist?