AUFGABENSAMMLUNG
JUNIOR*INNEN SOSE 2020

Diese Sammlung ist eine Auswahl an Aufgaben, die während des Sommersemesters 2020 mit Olympionik*innen der Universität Wien als Online-Kurse zur Vorbereitung auf den Junior-Regionalwettbewerb der 51. Österreichischen Mathematik-Olympiade bearbeitet wurden.

Alle Aufgaben sind hierbei in vier Teile aufgeteilt: Angabe, Hinweise, Lösung und Quellenangabe.

Weiters enthält die Sammlung einige, durch Einrahmung gekennzeichnete, theoretische Grundlagen und Tipps, die beim Lösen der jeweils folgenden Aufgaben hilfreich sind.

Fragen und Feedback per E-Mail sind jederzeit willkommen.

Datum: 10. November 2020.

Inhaltsverzeichnis

1. Algebra

Einstiegsaufgaben.

Aufgabe 1.1. Vera wurde beauftragt, Karten zu gestalten. Am ersten Tag erledigte sie 10 Prozent der Bestellung. Am zweiten Tag machte sie 25 Prozent des Restes und am dritten Tag 40 Prozent des neuen Restes. Danach hatte sie noch 81 Karten zu gestalten.

Wie viele Karten wurden bestellt?

Aufgabe 1.2. Für das Streichen der Wände im neuen Gebäude hätten 10 Arbeiter 15 Tage benötigt. Am Anfang gab es jedoch nur 6 Arbeiter, und nach 5 Tagen kamen zwei weitere Arbeiter und nach weiteren 3 Tagen 4 Arbeiter hinzu.

Nach wie vielen Tagen war der Auftrag fertig gestellt?

(Symmetrische) Gleichungen und Polynomgleichungen.

Was hat die Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ mit dem Gleichungssystem $x + y = 3$, $x \cdot y = 2$ zu tun? Die erste Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 1$ oder $x = 2$ eintritt. Die zweite Gleichung ist dann erfüllt, wenn $(x, y) = (1, 2)$ oder $(x, y) = (2, 1)$ eintritt. Diese Ähnlichkeit in der Lösungsmenge der Gleichungen ist kein Zufall! Es stellt sich heraus, dass man den Ausdruck $x^2 - 3x + 2$ auch als $(x - 1)(x - 2)$ schreiben kann:

$$(x-1)(x-2) = x \cdot (x-2) - 1 \cdot (x-2) = x \cdot x - 2 \cdot x - 1 \cdot x + 2 \cdot 1 = x^2 - (2+1)x + 2.$$

Links erkennt man, dass der Ausdruck nur Null wird, wenn $x = 1$ oder $x = 2$ gilt, weil ja ein Produkt von zwei Zahlen nur dann Null werden kann, wenn mindestens eine der Zahlen Null ist!

Wenn man aber (so wie wir vorher) einen solchen Ausdruck ausmultipliziert, dann steht vor dem x immer die Summe der beiden Lösungen, und der Term ohne x (der *konstante* Term) ist das Produkt der Lösungen.

Wenn man sich länger mit Ausdrücken wie $x^2 - 3x + 2$, den sogenannten *Polynomen*, beschäftigt, kann man beweisen, dass sie immer auf eine eindeutige Art und Weise in Faktoren wie $x - 2$ und $x - 1$ zerfallen, die sogenannten *Linearfaktoren*. Das ist genau wie bei den natürlichen Zahlen und den Primzahlen, und der Beweis funktioniert auch genau gleich. Der Satz, den man damit formulieren kann, heißt Satz von Vieta, nach dem französischen Mathematiker Françoise Viète.

Satz (Satz von Vieta)**.** *Eine Polynomgleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - \cdots + a_0 = 0$ hat maximal n Lösungen. Wenn sie genau n Lösungen hat, die wir hier mit $l_1, \ldots, l_n$ bezeichnen,* *dann gilt*

$$\begin{aligned} a_0 &= (-l_1)\cdot(-l_2)\cdot(-l_3)\cdot\ldots\cdot(-l_n) = (-1)^n l_1 l_2 l_3 \ldots l_n \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= l_1 l_2 + l_1 l_3 + \ldots + l_2 l_3 + \ldots + l_{n-1} l_n \\ a_{n-1} &= -l_1 - l_2 - l_3 - \ldots - l_n, \end{aligned}$$

und wir können das Polynom auch als $a_n(x-l_1)(x-l_2)(x-l_3)\ldots(x-l_n)$ *schreiben.*

Um den Satz anwenden zu können, muss man aber die Lösungen der Polynomgleichung *kennen*, oder zumindest etwas über sie wissen.

Dabei hilft ein weiterer alter Satz, der oft als das Lemma von Gauss bezeichnet wird (obwohl Gauß damals schon eine stärkere, aber komplizierter zu erklärende Sache bewiesen hat).

Satz (Lemma von Gauss)**.** *Wir betrachten eine rationale Lösung* l *der Gleichung* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \cdots + a_0 = 0$. *Wenn man* $l = \frac{p}{q}$ *als Bruch mit teilerfremden Zähler und Nenner darstellt, dann teilt* p *den Koeffizienten* a_0, *und* q *teilt* a_n.

Diesen Satz kann man sich ganz gut merken, indem man sich zuerst den Spezialfall $a_n = 1$ anschaut. Da gilt dann, dass jede rationale Lösung schon eine ganzzahlige Lösung sein muss, die a_0 teilen muss. Weil a_0 ja das Produkt aller Lösungen ist, ist das sehr einleuchtend (Ein Beweis ist das aber noch nicht, weil es ja auch nicht ganzzahlige Lösungen als Faktoren von a_0 geben könnte, und weil das Polynom nicht immer in Linearfaktoren zerfallen muss).

Um die ganzzahligen Lösungen eines Polynoms wie $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ zu finden, muss man also einfach nur alle Teiler von 6 (und zwar auch negative, wie -1) ausprobieren.

Beispiel. *Finde alle Lösungen von* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ *und von* $x^2 - 6x - 55 = 0$.

Warum machen wir das eigentlich? Einerseits, weil das Lösen von Polynomgleichungen ein wichtiges Stück mathematische Geschichte ist. Im 16. Jahrhundert war hier die vorderste Front der Wissenschaft, und an den fürstlichen Höfen Italiens lieferten sich Menschen wie Cardano und Tartaglia Wettbewerbe, wer das Geheimnis der allgemeinen Lösung für Polynome als erstes ergründen kann.

Andererseits kann man damit Gleichungssysteme in mehreren Variablen in den Griff kriegen. Solche Systeme sind in modernen Mathematikolympiaden immer noch eine wichtige Quelle für Beispiele.

Finden wir nun alle Paare von Zahlen a, b, sodass $a + b = 3$ und $ab = 2$ gilt. Nehmen wir einmal an, $a = A$ und $b = B$ sei so eine Lösung. Dann gilt

$$(x - A)(x - B) = x^2 - (A + B)x + AB = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Weil aber die Linearfaktorzerlegung eindeutig ist, muss $(x - A)$ entweder $(x - 2)$ oder $(x - 1)$ sein, und $(x - B)$ muss der jeweils andere Term sein. Es gilt also $(A, B) = (1, 2)$ oder $(A, B) = (2, 1)$. Weil A und B nur Platzhalter für beliebige Lösungen waren, haben wir nun alle Lösungen gefunden. Probieren wir nun aus, ob das bei mehr Variablen genauso funktioniert!

Beispiel. *Finde alle Lösungen des Systems*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ xy + yz + xz &= 11 \\ xyz &= 6. \end{aligned}$$

Warum sind die Gleichungssysteme heute so viel wichtiger in Wettbewerben als die Polynomgleichungen? Weil es viel mehr Möglichkeiten gibt, sie kreativ ein wenig zu verändern und damit schwieriger zu machen. Betrachten wir zum Beispiel das System $a^2 + b^2 = 25$, $a + b = 8$. Hier können wir nicht sofort den Satz von Vieta verwenden, obwohl das System auch symmetrisch ist (d.h. es verändert sich nicht, wenn man Variablen vertauscht). Aber wenn $a + b = 7$ gilt, dann wissen wir, dass auch $64 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ folgt. Das bedeutet, dass $49 = 25 + 2ab$, also, nach Äquivalenzumformungen, $12 = ab$. Jetzt wissen wir, dass $a + b = 7$ und $ab = 12$ gilt, dass a und b also die zwei verschiedenen Lösungen der Polynomgleichung $x^2 - 7x + 12$ sein müssen. Wenn man alle Teiler von 12 durchprobiert, dann kommt man auf die zwei Lösungen 3 und 4. Das heißt, die Lösungen des ursprünglichen Systems sind $(a, b) = (3, 4)$ und $(a, b) = (4, 3)$. Was muss man tun, um das folgende System auf den Satz von Vieta zurückzuführen?

Beispiel. *Bestimme alle reellen Zahlen* a, b, c, *die* $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ *und* $a^3 + b^3 + c^3 = 36$ *erfüllen.*

Theorieteil von Josef Greilhuber

Aufgabe 1.3. Bestimme alle reellen Zahlen a, b und c, die $a + b = 3$, $b + c = 5$ und $a + c = 4$ erfüllen. Bestimme nun alle reellen Zahlen a, b, c und d, die $a + b = 3$, $b + c = 5$, $c + d = 7$ und $a + d = 5$ erfüllen. Gibt es reelle Zahlen, die $a + b = 4$, $b + c = 5$, $c + d = 7$ und $a + d = 5$ erfüllen?

Aufgabe 1.4. Bestimme alle Tripel positiver reeller Zahlen (a, b, c), die das Gleichungssystem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$
$$a + b + c = 11$$
$$\sqrt{abc} = 6$$

erfüllen.

Aufgabe 1.5. Es seien p und q reelle Zahlen. Die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

habe die reellen Lösungen x_1 und x_2. Zusätzlich gelten die folgenden zwei Bedingungen:

(1) Die Zahlen x_1 und x_2 unterscheiden sich voneinander um genau 1.
(2) Die Zahlen p und q unterscheiden sich voneinander um genau 1.

Man zeige, dass p, q, x_1 und x_2 ganze Zahlen sind.

Aufgabe 1.6. Für welche Werte von p und q sind die Lösungen der Gleichung $x^3 - px^2 + 11x - q = 0$ drei aufeinander folgende ganzen Zahlen?

Aufgabe 1.7. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$a^2 = b(b + 7)$$

mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

Aufgabe 1.8. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit zwei verschiedenen positiven Teilern, die gleich weit von $\frac{n}{3}$ entfernt sind.

Aufgabe 1.9. Es seien x und y ganze Zahlen mit $x + y \neq 0$. Man bestimme alle Paare (x, y), für die $\frac{x^2+y^2}{x+y} = 10$ gilt.

Aufgabe 1.10. Bestimme alle positive ganzen Zahlen für die gilt:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} = \sqrt{ab-1}$$

Gleichungssysteme und Faktorisierungen.

Aufgabe 1.11. Jure baut Wassermelonen und Honigmelonen an. Für jede Wassermelone die er verkauft, bekommt er 8 Euro und für jede Honigmelone 6 Euro. Um neuen Draht für seine Gartenzäune zu kaufen, muss er ein Viertel der Wassermelonen und die Hälfte der Honigmelonen verkaufen. Er würde den gleichen Betrag verdienen, wenn er ein Zwölftel der Wassermelonen und drei Viertel der Honigmelonen verkaufen würde. Wie viele Wassermelonen und Honigmelonen hat Jure in seinem Garten, wenn der Gesamtwert der Wassermelonen um 192 Euro höher ist als der Gesamtwert der Honigmelonen?

Aufgabe 1.12. Ein Vater gibt seinen Söhnen 160000 Euro und möchte, dass sie das Geld in gleiche Teile aufteilen. Aber einer seiner Söhnen verzichtet auf seinen Anteil, weshalb die Teile der anderen um 8000 Euro vergrößert werden.

Wie viele Söhne hat der Vater?

Aufgabe 1.13. Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned} ab + ac &= 3b + 3c \\ bc + bd &= 5c + 5d \\ ac + cd &= 7a + 7d \\ ad + bd &= 9a + 9b. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.14. Wenn sich die beiden Zahlen m und n jeweils als Summe von zwei Quadraten darstellen lassen, so gilt das auch für das Produkt $m \cdot n$. Zeige dies.

Bemerkung: Diese Erkenntnis geht auf Diophantos von Alexandria *zurück und wird Brahmagupta-Fibonacci-Identität genannt.*

Gaußklammer.

Für eine reelle Zahl x sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Beispielweise sind $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ und $\lfloor -0.1 \rfloor = -1$. Diese Zahl wird oft als die *Gaußklammer* von x bezeichnet. Der übrigbleibende Rest $x - \lfloor x \rfloor$ wird oft mit dem Symbol $\{x\}$ bezeichnet. Beispiele mit diesen beiden Objekten waren in der österreichischen Mathematik-Olympiade eine Zeit lang sehr beliebt, und in diesem Abschnitt wollen wir ein paar dieser Aufgaben anschauen.

Aufgabe 1.15. Man zeige: Es gibt keine positive rationale Zahl x mit

$$x^{\lfloor x \rfloor} = \frac{9}{2}$$

Aufgabe 1.16. Für die reellen Zahlen x und y gilt $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 10$ und $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 14$. Wie groß ist

$$\left\lfloor \sqrt{\left\lfloor \sqrt{\lfloor x + y \rfloor} \right\rfloor} \right\rfloor?$$

Bemerkung: Für $r \geq 0$ ist $\sqrt{r}$ die eindeutig bestimmte *positive* Zahl, die quadriert r ergibt.

Aufgabe 1.17. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die gleichzeitig die folgenden drei Gleichungen erfüllen.

$$\lfloor x \rfloor + \{y\} = z$$
$$\lfloor y \rfloor + \{z\} = x$$
$$\lfloor z \rfloor + \{x\} = y$$

Aufgabe 1.18. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor x \rfloor = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 1.19. Man bestimme alle reellen Zahlen x mit $x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = \sqrt{2}$.

Aufgabe 1.20. Man bestimme alle reellen Zahlen x mit $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{4} \rfloor = x^2$.

Aufgabe 1.21. Löse in den reellen Zahlen die Gleichung

$$x + |x| + \lfloor x \rfloor + \operatorname{sgn}(x) = 2$$

Hinweis: Die Signumfunktion ist definiert als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 1.22. *(Dirichletscher Approximationssatz).* Gegeben sei eine positive irrationale Zahl a. Man zeige, dass es für jede Zahl $b \in [0, 1]$ eine natürliche Zahl n gibt, sodass der Abstand von b und $\{n \cdot a\}$ kleiner als $\frac{1}{q}$ ist.

Ungleichungen.

Aufgabe 1.23. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y + xy = 3$. Man beweise, dass $x + y \geq 2$. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.24. Es seien a und b zwei positive reelle Zahlen mit $a \leq 2b \leq 4a$. Man zeige, dass dann immer

$$4ab \leq 2(a^2 + b^2) \leq 5ab$$

gilt.

Aufgabe 1.25. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.26. Seien a und b positive reelle Zahlen mit $a \neq b$.

Zeige, dass

$$a^4 + 3b^4 < 4ab^3$$

Aufgabe 1.27. Für positive Zahlen a, b mit $a^3 + b^3 = a - b$ gilt:

$$a^2 + b^2 < 1$$

Aufgabe 1.28. Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen a und b die Ungleichung

$$a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.29. Es seien x und y positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{1}{x+xy} + \frac{1}{y+xy} \geq \frac{4}{x+2xy+y}.$$

Aufgabe 1.30. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$:

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Aufgabe 1.31. Man zeige für alle positiven x und y:

$$\frac{(x+y)^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Aufgabe 1.32. Beweise, dass für alle reellen Zahlen a, b mit $a^2 + b^2 \neq 0$ folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} \leq \frac{4}{|a+b|}$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.33. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Beweise

$$(a+c)(b+1) \leq 4$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.34. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung

$$(a+2)(b+2) \geq cd$$

gilt und gebe vier Zahlen a, b, c und d an, für die Gleichheit eintritt.

Aufgabe 1.35. Löse in den positiven ganzen Zahlen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$$

Aufgabe 1.36. Für alle positiven Zahlen a, b und c gilt:

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Aufgabe 1.37. Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$

gilt. Für welche x, y tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 1.38. Löse folgende Ungleichung in der Menge der reellen Zahlen:

$$\frac{|x^2-4|}{x+2} \geq x$$

Aufgabe 1.39. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$.

Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.

Aufgabe 1.40. Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a$, $b \leq 1$.

Beweise:

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 1.41. Seien a, b und c positive reelle Zahlen mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n das Tripel (a^n, b^n, c^n) Seitenlängen eines Dreiecks sind.

Zeige, dass das Dreieck gleichschenkelig ist.

Aufgabe 1.42. Zeige: Für $A > B \geq 0$ und $n \geq 2$ gilt:

$$n \cdot (A-B) \cdot B^{n-1} < A^n - B^n < n \cdot (A-B) \cdot A^{n-1}$$

Folgen und Reihen.

Aufgabe 1.43. Seien $\langle x_n \rangle$ und $\langle y_n \rangle$ Folgen mit der Eigenschaft $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ und

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 4y_n}{5} \quad \text{und} \quad y_{n+1} = \frac{4x_n + 3y_n}{5}.$$

Bestimme

$$S_{2020} = x_{2020}^2 + y_{2020}^2.$$

Aufgabe 1.44. Multipliziert man

$$(1 - x + x^2 - + \ldots - x^{99} + x^{100}) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} + x^{100})$$

aus, so sind alle Koeffizienten der ungeraden Potenzen Null.

Zeige dies.

Aufgabe 1.45. Sei $k \geq 1$ eine positive ganze Zahl.

Zeige:

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+k)!} < \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

Aufgabe 1.46.

a) Sei M die Menge der positiven natürlichen Zahlen, von denen kein Primfaktor größer als 3 ist, also $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, \ldots\}$. Berechne die Summe der Kehrwerte von M, sprich
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots$$

b) Zeige
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \infty$$

c) Kann man die Idee von a) mit b) kombinieren, um zu zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt?

2. Kombinatorik

Denksport.

Aufgabe 2.1. Eine radioaktive Kugeln.

Gegeben sind N Kugeln, eine davon ist radioaktiv. Mithilfe eines Strahlungsdetektors können wir herausfinden, ob eine Kugel oder eine Gruppe von Kugeln radioaktiv ist (d.h wir können den Detektor auf eine oder auf mehrere Kugeln gleichzeitig anwenden). Wie viele Messungen sind notwendig, um die radioaktive Kugel zu finden? Löse diese Aufgabe für verschiedene Werte von N:

a.) $N = 2$	b.) $N = 3$	c.) $N = 4$	d.) $N = 5$
e.) $N = 8$	f.) $N = 11$	g.) $N = 16$	h.) $N = 17$

Versuche jetzt die Abhängigkeit zwischen der Anzahl der Kugeln und der Anzahl der benötigten Messungen für beliebiges N anzugeben.

Aufgabe 2.2. Zwei radioaktive Kugeln.

a.) Gegeben sind 7 Kugeln, genau 2 davon sind radioaktiv. Finde diese mit 5 Messungen.
b.) Gegeben sind 10 Kugeln, genau 2 davon sind radioaktiv. Finde diese mit 6 Messungen.

c.) Gegeben sind 11 Kugeln, genau 2 davon sind radioaktiv. Kann man diese mit 7 Messungen finden?
d.) Gegeben sind 15 Kugeln, genau 2 davon sind radioaktiv. Finde diese mit 7 Messungen.

Aufgabe 2.3. Mehrere radioaktive Kugeln. Gegeben sind 10 Kugeln, genau 6 davon sind radioaktiv. Kann man diese mit 9 Messungen finden, wenn unser Messgerät nur zwei Kugeln gleichzeitig messen kann, und nur dann die Strahlung entdeckt, wenn die beide Kugeln radioaktiv sind?

Aufgabe 2.4. In zwei Kisten liegen 5 und 6 Kugeln, eine von jeder Kiste ist radioaktiv. Mithilfe eines Strahlungsdetektors kann man herausfinden, ob eine Kugel oder eine Gruppe von Kugeln radioaktiv ist. Finde beide radioaktiven Kugeln mit fünf Messungen.

Aufgabe 2.5. Gegeben sind 30 Kugeln, 5 davon sind radioaktiv. Mithilfe eines Messgeräts kann man herausfinden, wie viele radioaktive Kugeln die getestete Gruppe enthält (man kann das Messgerät auf eine oder auf mehrere Kugeln gleichzeitig anwenden).

Finde mit drei Messungen 5 saubere (nicht-radioaktive) Kugeln.

Aufgabe 2.6. Bestimme die kleinste Zahl n, für die jede n-elementige Teilmenge von $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ zwei Zahlen enthält, deren Differenz 8 ist.

Schubfachschluss.

Wir beginnen zunächst mit einem kleinen Theorieabschnitt, bevor Aufgaben zum Schubfachschluss folgen.

Satz (Schubfachprinzip)**.** *Falls man n Objekte auf m Mengen (n, $m > 0$) verteilt und n größer als m ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt ist.*

Satz (Schubfachprinzip (bildhafte Vorstellung dieses Vorgangs))**.** *Gegeben seien m „Schubfächer“ und n „Gegenstände“, die auf diese Fächer verteilt werden sollen mit $n > m > 0$. Dann gibt es ein Fach, in dem mindestens zwei Gegenstände liegen.*

Beweis. Der Beweis dieses Prinzips kann indirekt geführt werden: Falls das Prinzip nicht stimmt, dann liegt in jedem der m Schubfächer höchstens ein Gegenstand. Damit gibt es höchstens m Gegenstände. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung $n > m$. □

Satz (Schubfachprinzip (allgemeine Form))**.** *Falls man $m \cdot k+1$ Objekte auf m Mengen (m, $k > 0$) verteilt, dann gibt es eine Menge, in der mindestens $k+1$ Objekte sind.*

Aufgabe 2.7. Es gibt 37 Kartoffelsäcke auf Lager, mit Kartoffeln, die zu einer von vier Sorten gehören. Alle Kartoffeln aus dem gleichen Sack sind auch von der gleichen Sorte. Ein Restaurant hat neun Säcke einer Sorte bestellt.

Ist es sicher möglich, diesen Auftrag zu erfüllen?

Bemerkung: Um welche Sorte es sich handelt ist dem Restaurant nicht wichtig.

Aufgabe 2.8. Auf einem Blatt Papier sind sechs Punkte gegeben, die so platziert sind, dass keiner der Punkte auf einer Geraden mit zwei anderen Punkten liegt. Man verbindet diese Punkte mit einem grünen oder einem roten Stift. Zwei Spieler A und B machen das nacheinander und dürfen beide Farben benutzen. A will, dass auf der Ebene ein rotes oder ein grünes Dreieck erscheint. B will das vermeiden.

Beweise, dass B immer verliert.

Aufgabe 2.9. Beweise folgende Aussagen:

a) Unter 10 beliebigen ganzen Zahlen existieren zwei, deren Differenz durch neun teilbar ist.
b) Unter n beliebigen ganzen Zahlen existieren einige (oder vielleicht eine), deren Summe durch n teilbar ist.
c) Man wirft 51 Punkte in ein Einheitsquadrat (ein Quadrat mit Seitenlängen eins). Es gibt einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$, der drei dieser Punkte enthält.

Aufgabe 2.10. Beweise, dass es eine Zahl gibt, die die Form

$$20192019\dots201900\dots0,$$

hat und durch 2020 teilbar ist.

Bemerkung: Die Zahl soll aus einigen Wiederholungen der Ziffernfolge 2, 0, 1 und 9 bestehen, gefolgt von einigen Nullen.

Aufgabe 2.11. Kann man

a) zwei Primzahlen finden, bei denen die letzten drei Ziffern übereinstimmen?
b) mehrere Primzahlen finden, bei denen die letzten drei Ziffern übereinstimmen?

Pascal'sches Dreieck und Binomialkoeffizient.

Der nun folgende Abschnitt wurde von Josef Greilhuber erstellt und vom MmF-Team bearbeitet. Er dient der gemeinsamen Erarbeitung der beiden Themen und sollte als eine geschlossene Einheit betrachtet werden.

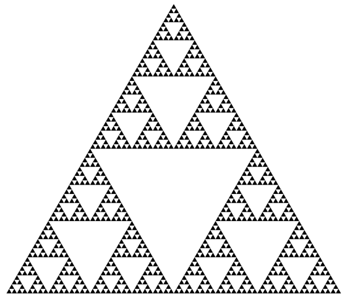
Das *Pascal'sche Dreieck* ist ein Schema von Zahlen, die wie in der folgenden Abbildung angeordnet sind: Links und rechts stehen Einser, jede andere Zahl ist die Summe der beiden Zahlen links und rechts darüber. Wir stellen uns dieses Dreieck *unendlich weit* fortgesetzt vor.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Aufgabe 2.12. Zeige, dass die Summe jeder Zeile ab der zweiten das Doppelte der Summe der darüber liegenden Zeile ist.

Aufgabe 2.13. Zeichne ein Pascal'sches Dreieck bis zur sechzehnten Zeile – wobei der oberste Einser als nullte Zeile gilt – und markiere alle ungeraden Zahlen.

Vergleiche das Ergebnis mit der Abbildung des Sierpinski-Dreiecks rechts. Überzeuge dich davon, dass für *jede* Zweierpotenz 2^n die $(2^n - 1)$-te Zeile nur ungerade Zahlen enthalten würde.



Wir bezeichnen nun den k-ten Eintrag in der n-ten Zeile mit $\binom{n}{k}$. Es gilt dann also $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ und so weiter.

Aufgabe 2.14. Beweise die *Hockey-Stick-Regel*: Teilsummen der Spalten des Pascal'schen Dreieck sind immer in der nächsten Spalte, eins weiter unten zu finden, also

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Aufgabe 2.15. Die Zahl $\binom{n}{k}$ gibt auch die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten an, aus einer Menge von n verschiedenen Dingen genau k davon auszuwählen. Überzeuge dich davon, dass für diese Anzahl dieselbe Regel wie für die Einträge des Pascal'schen Dreiecks gilt, nämlich

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Zusammen mit der Tatsache, dass man kein Ding sowie alle Dinge in einer Menge von n Dingen jeweils nur auf eine Möglichkeit auswählen kann (indem man eben keins bzw. alles nimmt) beweist das schon, dass $\binom{n}{k}$ die gesuchte Anzahl ergibt.

Aufgabe 2.16. Zeige die *Identität von Vandermonde*:

$$\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Aufgabe 2.17. Wir definieren $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$ für jede positive ganze Zahl. Nun betrachten wir die Zahlen $C(n,\,k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Zeige, dass auch für diese Zahlen gilt:

$$C(n,\,0) = C(n,\,n) = 1 \text{ und } C(n,\,k) = C(n-1,\,k-1) + C(n-1,\,k) \text{ für } n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n-1.$$

Damit folgt also

$$\binom{n}{k} = C(n,\,k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Aufgabe 2.18. Zeige, dass für jede Primzahl p und jede Zahl k zwischen 1 und $p-1$ der Eintrag $\binom{p}{k}$ durch p teilbar ist.

Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 2.19. Ante und Branko erhalten 2415 Euro und beschließen, das Geld mit Hilfe zweier Würfel aufzuteilen. Wenn die Würfel die gleichen Zahlen zeigen, teilen Ante und Branko das Geld im Verhältnis 2 : 1 auf und wenn sie nicht die gleichen Zahlen zeigen, teilen sie das Geld im Verhältnis 2 : 3 auf. Welches Ereignis ist wahrscheinlicher: dass Ante mehr als 1000 Euro bekommt oder dass Branko weniger als 1000 Euro bekommt?

Bestimme diese Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 2.20. Es gibt 12 Jungen und 13 Mädchen im Tennisclub. Unter den Mädchen sind drei Schwestern. Ein Paar wird zufällig ausgewählt, um gegeneinander zu spielen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schwestern ausgewählt werden?

Aufgabe 2.21. Eine Urne enthält 30 nummerierte Kugeln. Die Kugeln sind mit den Zahlen von 1 bis 30 durchnummeriert. Marko zieht 2 Kugeln aus der Urne. Wie wahrscheinlich ist es,

a) dass die Differenz ihrer Zahlen durch 5 teilbar ist?
b) dass die Summe ihrer Zahlen durch 5 teilbar ist?

Kombinatorische Geometrie.

Aufgabe 2.22. Gegeben seien 101 Punkte auf einer Geraden und 20 Punkte auf einer dazu parallelen Geraden. Wie viele Geraden gibt es, auf denen genau zwei solche Punkte liegen?

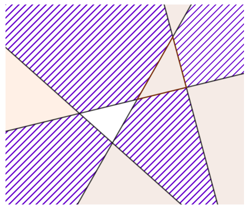
Aufgabe 2.23. Wie viele Diagonalen hat ein konvexes Viereck, Fünfeck, Sechseck? Wie viele hat ein allgemeines n-Eck?

Aufgabe 2.24. Wir betrachten n Geraden in der Ebene, sodass keine drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen und keine zwei parallel sind. Wie viele Schnittpunkte von Geraden gibt es insgesamt?

Aufgabe 2.25. In wie viele Bereiche teilen n Geraden die Zeichenebene höchstens?

Aufgabe 2.26.

Die Ebene werde durch n Geraden in Teilgebiete zerlegt.
Gebiete, die eine gemeinsame Begrenzungslinie haben, nennen wir benachbart.
Zeige: Alle Gebiete lassen sich mit zwei Farben so färben, dass benachbarte Gebiete immer verschieden gefärbt sind.



Beachte: ein Gebiet ist hier ein zusammenhängendes, von geraden Linien begrenztes Flächenstück, dessen Rand nicht zu dem Gebiet gehört.

Aufgabe 2.27. Auf jedem Feld eines 3×3 – Schachbretts sitzt ein Käfer. Sobald die Pausenglocke ertönt, wechselt jeder Käfer auf ein benachbartes Feld. *(Zwei Felder heißen benachbart, wenn sie eine Kante gemeinsam haben.)*

Zeige: Nach dem Wechsel gibt es mindestens ein Feld, auf dem zwei oder mehr Käfer sitzen.

Aufgabe 2.28. Gegeben sei ein 9×9-Schachbrett. Eine Spielfigur fängt im linken oberen Feld an und darf sich in jedem Schritt ein Feld nach rechts oder unten bewegen. Wie viele mögliche Pfade zum rechten unteren Feld kann die Spielfigur nehmen?

Aufgabe 2.29. Wir betrachten ein 9×9-Schachbrett und eine Spielfigur wie im vorigen Beispiel. Wie groß ist der Anteil der erlaubten Pfade, die von links oben nach rechts unten gehen, und die über das Feld ganz in der Mitte des Schachbretts gehen?

Aufgabe 2.30. Wir betrachten ein $2 \times n$-Rechteck. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Rechteck mit 2×1-Dominosteinen auszulegen? Dabei müssen die Dominos alles überdecken und dürfen einander nicht überlagern.

Aufgabe 2.31. Wir betrachten ein regelmäßiges n-Eck $A_1 A_2 \ldots A_n$. Der Winkel $\angle A_3 A_1 A_4$ ist $9°$. Wie viele Diagonalen hat das n-Eck?

3. Geometrie

Winkeljagd.

Aufgabe 3.1. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit der Höhe CN. Die Winkelsymmetrale von $\angle BAC$ schneidet die Höhe CN im Punkt D und die Seite BC im Punkt E. Das Dreieck DEC ist gleichseitig und hat die Fläche $4\sqrt{3}$. Berechne die Fläche des Dreiecks ABC.

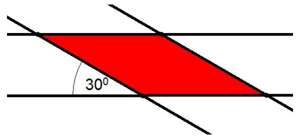
Aufgabe 3.2. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD.

Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.

Flächen und Verhältnisse.

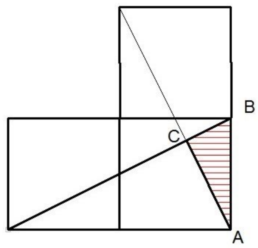
Aufgabe 3.3. Zwei Streifen der Breite a (d.h. ihr Normalabstand hat die Länge a) sind gegeben.

Sie liegen, wie in der Figur dargestellt ist, in einem Winkel von 30° übereinander.
Wie groß ist die Fläche, die sie gemeinsam haben?



Aufgabe 3.4. Drei Quadrate mit der Seitenlänge a sind gegeben.

Sie sind, wie in der Figur dargestellt, aneinandergefügt.
Berechne den Flächeninhalt des eingezeichneten Dreiecks ABC.



Aufgabe 3.5. Der Punkt E liegt auf der Seite AD des Quadrats $ABCD$. Der Schnittpunkt von AC mit BE sei S. Die Dreiecke ESC, BCS, CDE ASE und ABS heißen in dieser Reihenfolge A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5.

Zeige, dass für die Flächeninhalte gilt

$$|A_1| = |A_5| \quad \text{und} \quad |A_3| + |A_4| = |A_2|,$$

wenn E

(i) der Halbierungspunkt **(ii)** ein beliebiger Punkt

von AD ist.

Aufgabe 3.6. Der Punkt M liege im Inneren des Quadrats $ABCD$. Die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM werden mit P, Q, R und S bezeichnet.

Das Viereck $PQRS$ überdeckt welchen Anteil des Quadrats $ABCD$?

Aufgabe 3.7. Es sei ABCD ein Rechteck mit $AB \neq BC$ und dem Mittelpunkt O. Die Normale durch O zu BD schneidet die Gerade AB in E und die Gerade BC in F. Der Mittelpunkt der Strecke CD sei M, der Mittelpunkt der Strecke AD sei N.

Beweise: FM steht normal zu EN.

Strahlensatz.

Aufgabe 3.8. Gegeben sei eine Strecke AB. Wir errichten über und unter der Strecke AB die gleichseitigen Dreiecke ABC bzw. ADB. Wir bezeichnen die Mittelpunkte von AC und BC mit E bzw. F.

Man zeige, dass die Geraden DE und DF die Strecke AB in drei gleich lange Teile zerlegen.

Aufgabe 3.9. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit den Umkreismittelpunkt O. P sei ein beliebiger Punkt auf AB und D bzw. E seien die Fußpunkte der Lote von P auf BC bzw. AC.

Beweise, dass OP die Strecke DE halbiert.

Pythagoras und Thales.

Aufgabe 3.10. Der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$ wird an C gespiegelt. Dadurch erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDE mit der Strecke AM wird mit S bezeichnet.

Man zeige, dass S die Strecke AM halbiert.

Aufgabe 3.11. Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck, M der Mittelpunkt der Seite AC und F auf AB der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C.

Man beweise, dass $AM = AF$ genau dann gilt, wenn $\angle BAC = 60°$.

Peripheriewinkelsatz.

Aufgabe 3.12. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit $AC = BC$. Auf dem Bogen CA seines Umkreises, der B nicht enthält, liege ein Punkt P. Der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade AP werde mit E bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade BP werde mit F bezeichnet.

Man beweise, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind.

Aufgabe 3.13. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei t die Tangente an den Umkreis im Punkt B. Die Fußpunkte der Höhen auf die Seiten BC bzw. AB seien D und E.

Beweise: Die Tangente t ist zur Verbindungsgeraden der Punkte D und E parallel.

Aufgabe 3.14. Die Punkte A und B liegen auf dem Kreis k, AB ist kein Durchmesser. C ist der Schnittpunkt der Tangenten in A bzw. B.

Zeige, dass der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC auf k liegt.

Aufgabe 3.15. Auf den Seiten BC, CA und AB werden in dieser Reihenfolge Punkte A', B' und C' jedoch nicht die Endpunkte gewählt. Sei k_1 der Umkreis des Dreiecks ABC', k_2 der Umkreis des Dreiecks $BA'C$ und k_3 der Umkreis des Dreiecks $CA'B$.

Zeige, dass die drei Kreise einen Punkt gemeinsam haben.

Aufgabe 3.16. Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S.

Man zeige:

a) Die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.
b) Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC.

Aufgabe 3.17. In einem Dreieck ABC werden drei Kreis k_1, k_2 und k_3 eingezeichnet. (a, b, c sind die Seiten, die den gleichnamigen Eckpunkten gegenüberliegen)

k_1 ist der Kreis durch A und B, der a berührt.

k_2 ist der Kreis durch B und C, der b berührt.

k_3 ist der Kreis durch C und A, der c berührt.

Zeige, dass die drei Kreise einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Vierecke.

Aufgabe 3.18. $ABCD$ sei ein Sehnenviereck mit Umkreis k. Verlängert man AB über B hinaus und DC über C hinaus, so schneiden einander die beiden Geraden AB und DC in S. k_1 ist jener Kreis, der durch A und B geht und CD in F berührt. k_2 ist jener Kreis, der durch C und D geht und AB in H berührt.

Zeige, dass der Normalabstand des Punktes H von CD gleich groß ist wie der Normalabstand des Punktes F von AB.

Aufgabe 3.19. $ABCD$ sei ein Tangentenviereck, wobei keine Seiten parallel sind. Weiters seien die Punkte E bzw. F die Schnittpunkte der Geraden BA mit CD bzw. AD mit BC.

Zeige folgende Eigenschaften:

a) $AB + CD = BC + DA$
Beweise auch die Umkehrung (*also: wenn diese Gleichung gilt, so handelt es sich um ein Tangentenviereck*)
b) $EA + AF = EC + CF$

c) $BE - BF = ED - DF$

Bemerkung: Ein Tangentenviereck *ist ein Viereck, das einen Inkreis besitzt, die Seiten also Tangenten eines Kreises k sind*

4. Zahlentheorie

Teiler, Teilbarkeit, Primzahlen, Primfaktoren.

Aufgabe 4.1. Eine natürliche Zahl ist *defizient*, wenn die Summe aller ihrer Teiler (sich selbst nicht eingeschlossen) kleiner ist als die Zahl selbst. z.B. 15, da $1 + 3 + 5 < 15$.

Zeige, dass es unendlich viele defiziente Zahlen gibt.

Aufgabe 4.2. Eine natürliche Zahl ist *abundant*, wenn die Summe aller ihrer Teiler (sich selbst nicht eingeschlossen) größer ist als die Zahl selbst. z.B. 12, da $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$ ist.

Zeige, dass es unendlich viele abundante Zahlen gibt.

Aufgabe 4.3. Beweise, dass die Differenz zweier natürlicher Zahlen, von denen die eine durch beliebiges Umstellen der Ziffern der andren entsteht, stets durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 4.4. Auf wie viele Arten kann die Zahl 345 als Summe von aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen dargestellt werden?

Aufgabe 4.5. Die Ziffernsumme (auch Quersumme) $Zi(a)$ einer Zahl a ist die Summe der Ziffern. z.B. ist $Zi(356) = 3 + 5 + 6 = 14$.

Sei $a = 2019^{2020}$. Bestimmt man $Zi(a)$ und anschließend $Zi(Zi(a))$ und dann $Zi(Zi(Zi(a)))$ usw. so lange, bis die sich ergebende Zahl einstellig ist (und sich somit bei weiterer Anwendung von Zi nicht mehr ändert), so erhält man welche Zahl?

Aufgabe 4.6. Ein Briefträger will n Pakete mit Gewichten $1, 2, 3, \ldots, n$ in drei genau gleich schwere Gruppen aufteilen. Kann ihm das gelingen, falls

(a) $n = 2011$
(b) $n = 2012$

gilt?

Aufgabe 4.7. Zu jeder Seite eines Quadrats wird mit roter Farbe eine positive ganze Zahl geschrieben. Zu jedem Eckpunkt wird mit grüner Farbe das Produkt der beiden roten Zahlen geschrieben, die bei den angrenzenden Seiten stehen. Die Summe der grünen Zahlen sei 40.

Welche Werte sind für die Summe der roten Zahlen möglich?

Aufgabe 4.8. Finde alle ganzen Zahlen n, für die die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

genau 5 Lösungen (x, y) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hat.

Aufgabe 4.9. Seien $d_1 < d_2 < ... < d_r$ alle Teiler von n, die kleiner sind als n. Finde alle n mit

$$\text{kgV}(d_1, d_2, ..., d_r) \neq n.$$

Aufgabe 4.10. Seien a, b und c ganze Zahlen.

Beweise: Wenn die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mindestens eine rationale Lösung besitzt, so sind nicht alle drei Zahlen a, b und c ungerade.

Aufgabe 4.11. Finde ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, welches $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ als Nullstelle besitzt. Schließe mit Hilfe dieses Polynoms darauf, dass die Zahl $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 4.12. Zeige, dass der größte gemeinsame Teiler von $n^3 + 1$ und $n - 1$ entweder 1 oder 2 ist.

Aufgabe 4.13. Sei n keine Quadratzahl und $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n (etwa $\tau(20) = 6$). Zeige, dass das Produkt aller Teiler von n gleich $n^{\tau(n)/2}$ ist.

Aufgabe 4.14. Alice und Bob spielen ein Spiel. Zunächst einigen sie sich auf eine positive ganze Zahl n. Anschließend nennen sie abwechselnd (beginnend mit Alice) Teiler von n, die kleiner als n selbst sind und bisher noch nicht genannt wurden. Ein Spieler gewinnt, sobald das kleinste gemeinsame Vielfache aller bisher genannten Zahlen (inklusive der von ihm/ihr gerade genannten Zahl) gleich n ist. Welcher der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie, wenn $n = 2^{34} \cdot 5^{67}$?

Aufgabe 4.15. Bestimme alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, so dass folgendes gilt:

Alle Potenzen a^n mit $n \geq 1$ haben dieselben letzten drei Stellen wie a. (d.h. a und alle Zahlen a^n stimmen in der Einer-, Zehner- und Hunderterstelle jeweils überein)

Quadrate.

Aufgabe 4.16. Finde alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

a) $n^2 + 8$ eine Quadratzahl ist,
a) $n^2 - 3n + 11$ eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 4.17. Seien $d_1 < d_2 < ... < d_r$ alle Teiler von n. Zeige, dass die Gleichung

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = n$$

keine Lösung besitzt.

Quadratische Reste.

Aufgabe 4.18. Beweise, dass die Summe von 5 aufeinanderfolgenden Quadratzahlen kein Quadrat einer natürlichen Zahl sein kann.

Aufgabe 4.19. Beweise, dass es keine ganzen Zahlen a, b, c gibt mit

$$a^2 + b^2 - 4c = 3.$$

Aufgabe 4.20. Löse in den nicht negativen ganzen Zahlen

$$k^2 = 21608 + 6^n$$

Diophantische Gleichung.

Gleichungen, die in den ganzen Zahlen zu lösen sind, nennt man *Diophantische Gleichungen.*

Diophantos von Alexandria lebte irgendwann zwischen 100 v.Chr. und 350 n. Chr. Genaueres weiß man nicht. Er hat sich mit Fragen der Algebra und Zahlentheorie beschäftigt.

Aufgabe 4.21. Wie viele Paare positiver ganzer Zahlen (m, n) gibt es, sodass

$$m \cdot n + 2 \cdot m - 2 \cdot n = 2020$$

gilt?

Aufgabe 4.22. Löse in den ganzen Zahlen

$$20xy - 4x - 5y - 27 = 0$$

Aufgabe 4.23. Löse in den ganzen Zahlen

$$3xy + 2x - 5y - 6 = 0$$

Aufgabe 4.24. Die Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$ hat in den ganzen Zahlen die Lösung $(2; 1)$.

Gib eine weitere Lösung an und zeige, dass sogar unendlich viele ganzzahlige Lösungen existieren.

Aufgabe 4.25. Finde alle a, $b \in \mathbb{Z}$, sodass

$$ab + 2 = a^3 + 2b.$$

Aufgabe 4.26. Zeige, dass die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ in den ganzen Zahlen nur die triviale Lösung $(0, 0, 0)$ hat.

Aufgabe 4.27. Löse in den ganzen Zahlen

$$2xy + 3y^2 = 24$$

Aufgabe 4.28. Wie viele Lösungen in den ganzen Zahlen hat die Gleichung

$$2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10?$$

HINWEISE ZU DEN AUFGABEN

Aufgabe 1.1. Berechne für jeden Tag den Anteil der Karten, der übrig geblieben ist.

Aufgabe 1.2. Wie schnell arbeitet ein Mann?

Aufgabe 1.3. Addiere und subtrahiere geschickt ausgewählte Zeilen voneinander, um einzelne Variablen zu isolieren.

Aufgabe 1.4. Versuche, die Zeilen des Gleichungssystems so zu potenzieren und miteinander zu multiplizieren, dass du den Satz von Vieta anwenden kannst.

Aufgabe 1.5. Benutze den Satz von Vieta oder die kleine Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

Aufgabe 1.6. Die drei Lösungen sind $(a-1)$, a und $(a+1)$. Anschließend wird die Aufspaltung der Gleichung 3. Grades in lineare Faktoren anzuwenden sein.

Aufgabe 1.7. Ergänze auf vollständige Quadrate und nutze, dass die Abstände zwischen Quadratzahlen immer größer werden. Alternativ: Beweise dass zwei teilerfremde ganze Zahlen, deren Produkt ein Quadrat ist, selbst ein Quadrat sein muss.

Aufgabe 1.8. Schreibe die Bedingung mittels zwei Gleichungen mit ganzzahligen Variablen auf, und addiere diese. Alternativ, denke über Teiler von n nach, die größer als $\frac{n}{3}$ sind.

Aufgabe 1.9. Forme die Gleichung so um, dass auf der linken Seite nur mehr vollständige Quadrate stehen.

Aufgabe 1.10. Den Term $ab-a-b+1$ kann man als Produkt $(a-1)(b-1)$ anschreiben (Rechteckszerlegung).

Aufgabe 1.11. Schreibe die Aufgabe als ein Gleichungssystem auf.

Aufgabe 1.12. Wandle die Aufgabe in ein Gleichungssystem um.

Aufgabe 1.13. Versucht, die Gleichung zu faktorisieren und Fälle zu unterscheiden.

Aufgabe 1.14. Ansatz: $m = a^2 + b^2$ und $n = c^2 + d^2$, dann ausmultiplizieren

Aufgabe 1.15. Unterscheide die Fälle $\lfloor x \rfloor = 0, 1, 2, \ldots$. Du darfst verwenden, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Aufgabe 1.16. Formuliere die Bedingung $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 10$ in $100 \leq x < 121$ um, und versuche, Rechenregeln für Ausdrücke zu finden, die solche Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 1.17. Ändert sich $\{x\}$, wenn wir zu x eine ganze Zahl hinzufügen?

Aufgabe 1.18. Faktorisiere beide Seiten und überlege, was du über Produkte von Zahlen mit diesen Eigenschaften sagen kannst.

Aufgabe 1.19. Was passiert, wenn $\lfloor x \rfloor = 0$? Was, wenn $\lfloor x \rfloor = 1$ und was wenn $\lfloor x \rfloor \geq 2$? Vorsicht, negative Zahlen sind hier auch erlaubt!

Aufgabe 1.20. Schließe negative Zahlen und große positive Zahlen aus. Dann bleiben nur mehr endlich viele Möglichkeiten für x übrig.

Aufgabe 1.21. Fallunterscheidung: $x < 1$, $0 < x < 1$ usw.

Aufgabe 1.22. Beweise zuerst, dass $\{x - y\} = \{\{x\} - \{y\}\}$ und dass $\{m \cdot x\} = \{m \cdot \{x\}\}$ gilt. Mit dem Schubfachschluss folgt die Aussage für $b = 0$, und daraus kann man die Aussage für beliebige b beweisen.

Aufgabe 1.23. Erinnere dich an die Ungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, die für alle $x, y > 0$ gilt. In diesem Beispiel ist ein Beweis durch Widerspruch zielführend.

Aufgabe 1.24. Aus $b \leq 2a$ folgt $b - a \leq a$ *und* $2b - 2a \leq b$. Das reicht (fast) zum Beweis, Vorsicht aber beim Zusammenmultiplizieren von zwei Ungleichungen (Beispiel: $-1 < 1$ und $-3 < 2$, aber

$(-1) \cdot (-3) > 1 \cdot 2)$.

Aufgabe 1.25. Die Variable c kommt nur links vor. Überlege also zuerst, wann die linke Seite so klein wie möglich ist. Die arithmetisch-geometrische Ungleichung ist auch hier nützlich.

Aufgabe 1.26. Fallunterscheidung, $a > b$ bzw. $a < b$.

Aufgabe 1.27. Zerlege $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = (a-b)$

Aufgabe 1.28. Viele Möglichkeiten:

- Mittelungleichungen
- $a^3 + b^3 + a + b = a(a^2+1) + b(b^2+1) \geq \ldots.$
- $a^3 + b^3 + a + b = a^2\left(a + \frac{1}{a}\right) + b^2\left(b + \frac{1}{b}\right) \geq \ldots$

Aufgabe 1.29. „Ausmultiplizieren“ oder Mittelungleichungen

Aufgabe 1.30. Beachte: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + bc + ca)$

Aufgabe 1.31. Verwende die AM- GM Ungleichung $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ und verschärfe die Ungleichung indem du $2\sqrt{xy}$ statt $x + y$ einsetzt.

Aufgabe 1.32. Unterscheide zwei Fälle: $a + b > 0$ und $a + b < 0$.

Aufgabe 1.33. Verwende zunächst die GM- AM Ungleichung: $(a+c)(b+1) \leq \frac{(a+b+c+1)^2}{4}$

Aufgabe 1.34. Man multipliziert auf der linken Seite aus und ersetzt dann die 4 durch $a^2+b^2+c^2+d^2$. Dann kann man Quadrate bilden.

Aufgabe 1.35. Nicht alle 3 Zahlen können größer oder gleich drei sein.

Aufgabe 1.36. Setze mehrfach die AM-GM Mittelungleichung ein: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Aufgabe 1.37. Auf den gemeinsamen Nenner $5(x+3)(y+3)$ bringen.

Aufgabe 1.38. Fallunterscheidungen: $|x| > 2$ und $|x| < 2$.

Aufgabe 1.39: Zeige: $x > z > y$.

Aufgabe 1.40: Verwende, dass für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ die Ungleichung

$$t^2 \leq t$$

gilt.

Aufgabe 1.41. o.B.d.A. kann man annehmen, dass $a \geq b \geq c > 0$ gilt.

Hier kommt die Dreiecksungleichung zum Zug:

Aus $c^n + b^n > a^n$ folgt $c^n > a^n - b^n = (a-b) \cdot (\dots)$. Diese rechte Klammer ist $\geq nb^{n-1} \geq nc^{n-1}$.

Aufgabe 1.42. Faktorisiere den mittleren Ausdruck:

$A^n - B^n = (A-B) \cdot (A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$

Aufgabe 1.43. Man kann vermuten, dass S konstant für alle n ist.

Aufgabe 1.44. Die Summenformel der endlichen geometrischen Reihe lautet

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{q - 1}$$

Für $0 < q < 1$ lautet die Summenformel der unendlichen geometrischen Reihe:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1-q}$$

Für die erste Klammer wähle $q = -x$, für die zweite Klammer wähle $q = x$. Dann ist das Ausmultiplizieren der beiden Klammern leicht.

Aufgabe 1.45.

Für $0 < q < 1$ gilt:

$$1 + q + q^2 + \ \ldots \ + q^k < \frac{1}{1-q}$$

da einige positive Summanden wegfallen.

Weiters: $\frac{1}{(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+2)^2}$.

Aufgabe 1.46. a) Multipliziere $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots) \cdot (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots)$ aus.

b) Teile die Brüche in Gruppen und zeige von jeder Gruppe, dass deren Summe ≥ 0.5 ist.

c) Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_r$, berechne dann die Summe in b) mit der Methode aus a).

Aufgabe 2.1.

(1) Vergleiche diese Aufgaben mit den Aufgaben vom Arbeitsblatt Waagen und Münzen.
(2) Versuche die Kugeln so zu teilen, dass die Teilmengen uns nicht nur zu den früheren Aufgaben, sondern auch zur minimalen Anzahl an Messungen führen.
(3) Wenn das Teilen auf zwei Gruppen immer das beste Verfahren ist, können wir die Zweierpotenzen benutzen, um allgemeine Abhängigkeit zu suchen.

Aufgabe 2.2. Um die Hinweise und Lösungen besser zu formulieren, nummerieren wir die Kugeln.

(1) Man kann mit den Paaren $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ anfangen (drei Messungen) und dann die Ergebnisse analysieren.
(2) Wir messen zuerst die Kugeln $\{1, 2, 3\}$. Wenn der Test negativ ist, kommen wir zu Aufgabe 2.2 a.).
(3) Siehe den Hinweis zu Aufgabe 2.2 d.)
(4) Fangen wir mit der Gruppe der Kugeln $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ an. Wenn dieser Test negativ ist, kommen wir zur Aufgabe 2.2 c.). Anderenfalls testen wir beispielsweise die Kugeln $\{4, 5, 6\}$, analysieren das Ergebnis und überlegen weitere Schritte.

Aufgabe 2.3. Es wäre günstig, eine radioaktive Kugel zu finden und diese als Muster zu benutzen. Die ersten vier Messungen können $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$ und $\{7, 8\}$ sein. Mögliche Ergebnisse:

(i) Alle vier Proben sind negativ
(ii) Genau eine Probe ist positiv
(iii) Genau zwei Proben sind positiv
(iv) Genau drei Proben sind positiv

Im letzten Fall haben wir alle sechs radioaktiven Kugeln schon gefunden.

Wenn alle vier Proben negativ sind, sind die letzte zwei Kugeln 9 und 10 radioaktiv. Eine davon können wir als Muster benutzen und mit anderen Kugeln zum Testen kombinieren.

In den Fällen 2. oder 3. haben wir schon zwei oder vier radioaktiven Kugeln gefunden und können wieder die Muster-Kugel benutzen.

Aufgabe 2.4. Wir nummerieren die Kugeln so, dass die Kugeln $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in der ersten Kiste sind und die Kugeln $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ in der zweiten. Wir fangen mit den Kugeln $\{1, 6, 7\}$ an.

Wenn diese Messung negativ ist, bleiben in jeder Kiste vier Kugeln $\{2, 3, 4, 5\}$ und $\{8, 9, 10, 11\}$, und wir können die Aufgabe 1(c) aus dem letzten Aufgabenblatt benutzen. Andernfalls kann man die Kugeln $\{1, 8, 9\}$ für die nächste Messung verwenden und die Ergebnisse analysieren.

Aufgabe 2.5. Wir teilen alle Kugeln in drei Gruppen mit je 10 Kugeln auf und überlegen, wie sich die fünf radioaktiven Kugeln auf diese drei Gruppen aufteilen. Nach der ersten Messung entscheiden wir, welche der drei Gruppen wir für die weiteren Messungen verwenden.

Aufgabe 2.6. Konstruiere zunächst eine möglichst große Teilmenge die keine zwei Zahlen enthält, deren Differenz 8 ist.

Aufgabe 2.7. Die vier Sorten entsprechen vier Schubfächern. Wir benutzen das Schubfachprinzip für vier Schubfächer und 37 Säcke.

Aufgabe 2.8. Überlege, wie viele Strecken von einem Punkt ausgehen und benutze das Schubfachprinzip für diese Strecken und zwei Farben (Schubfächer).

Aufgabe 2.9.

a) Den zehn ganzen Zahlen entsprechen zehn Reste bei Division durch 9 . Gibt es Übereinstimmungen unter diesen Resten? Wenn ja, wie können wir das benutzen?

b) Wir bezeichnen diese Zahlen mit $a_1, a_2, \dots a_n$, und betrachten die n Summen
a_1,
$a_1 + a_2$,
$a_1 + a_2 + a_3$,
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,
Überlege, ob mehrere dieser Zahlen denselben Rest bei Division durch n haben (müssen), und wie wir das benutzen können.

c) Wir teilen das Einheitsquadrat in 25 Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{5}$ und betrachten sie als „Schubfächer" für 51 Punkte.

Aufgabe 2.10. Wir betrachten 2020 Zahlen der Form
$2019, 20192019, 201920192019, \dots, \underbrace{201920192019\dots2019,}_{\text{Ziffern 2,0,1,9 wiederholen sich 2020 mal}}$ und überlegen, ob mehrere davon denselben Rest bei Division durch 2020 haben.

Aufgabe 2.11. Es ist hilfreich, die Reste bei Division durch 1000 zu betrachten.

Aufgabe 2.12. Jede Zahl in der Zeile darüber „steckt" gewissermaßen in zwei Zahlen der nächsten Zeile, nämlich in der links und der rechts daneben.

Aufgabe 2.13. Bei jeder Zweierpotenz 2^n scheint das Muster „neu zu starten", und zwar zwei Mal. Eine Weile lang berühren die zwei entstehenden Dreiecke einander nicht – wie lang genau?

Aufgabe 2.14. Gehe rückwärts vor: Spalte $\binom{n+1}{k+1}$ auf in $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, und $\binom{n}{k+1}$ wieder in $\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$, und so weiter.

Aufgabe 2.15. Betrachte ein bestimmtes Element in der Menge der n Dinge. Unterscheide nun, ob dieses Element unter den k ausgewählten Elementen ist oder eben nicht.

Aufgabe 2.16. Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Teile die Menge von $2n$ Elementen in zwei Mengen zu jeweils n Elementen auf: Um aus den $2n$ Dingen n auszuwählen, können wir z.B. keins aus der ersten Menge, und n aus der zweiten auswählen, oder eins aus der ersten, n–1 aus der zweiten, und so weiter.

Aufgabe 2.17. Hebe alle Faktoren heraus, die sowohl in $C(n-1,\, k-1)$ als auch in $C(n-1,\, k)$ vorkommen. Dann geht es nur mehr darum, die Brüche in der Klammer korrekt zu addieren.

Aufgabe 2.18. Wenn ein Bruch $\frac{A}{B}$ ganzzahlig ist, und eine Primzahl p den Zähler A, aber nicht den Nenner B teilt, dann teilt p auch $\frac{A}{B}$.

Aufgabe 2.19. Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich

Aufgabe 2.20. Wie viele verschiedene Paare von Schwerstern gibt es?

Aufgabe 2.21. Unterteile die Kugeln in 5 Gruppen. Zwei Kugeln sind genau dann in derselben Gruppe, wenn ihre Nummern bei Division durch 5 denselben Rest ergeben.

Aufgabe 2.23. Erinnere dich an die Gaußsche Summenformel $1 + 2 + \ldots + n = \ldots$

Aufgabe 2.24. Vergleiche diese Aufgabe mit Aufgabe 2.22.

Aufgabe 2.25.

Erstelle eine Tabelle. Überlege, wie viele Bereiche zusätzlich entstehen, wenn eine neue Gerade dazukommt. Bezeichne die maximale Anzahl an Bereichen bei n Geraden mit b_n.

n	b_n
0	1
1	2
2	4

Aufgabe 2.26. Vollständige Induktion

Aufgabe 2.27. Jedes Feld hat Koordinaten $(x,\, y)$ mit $1 \leq x \leq 3$ und $1 \leq y \leq 3$.

Jedem Käfer kann $x + y$ zugeordnet werden...

Aufgabe 2.28. Die Figur muss sich 16 Mal bewegen, davon genau acht mal nach unten und acht Mal nach rechts.

Aufgabe 2.29. Teile die Pfade in zwei erlaubte Pfade in 5×5-Schachbrettern auf.

Aufgabe 2.30. Führe mittels einer Fallunterscheidung jede Belegung auf eine Belegung entweder eines $2\times(n-1)$-Ecks oder eines $2\times(n-2)$-Ecks zurück. Die entstehende *rekursive* Beziehung definiert die sehr bekannten *Fibonacci*-Zahlen.

Aufgabe 2.31. Der *Peripheriewinkelsatz* besagt, dass $\angle A_3A_1A_4$ gleich dem Winkel $\angle A_3A_2A_4$ ist – das ist genug Information, um das n-Eck zu bestimmen.

Aufgabe 3.1. Winkeljagd

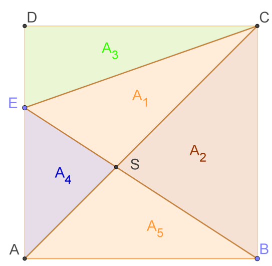
Aufgabe 3.2. Versuche möglichst viele Winkel auszurechnen (Winkeljagd) und verwende, dass ein Dreieck genau dann gleichschenkelig ist, wenn die Basiswinkel gleich groß sind.

Aufgabe 3.3. Bei dieser Aufgabe kann man schön sein Wissen über gleichseitige Dreiecke verwenden.

Aufgabe 3.4. Versuche ähnliche Dreiecke zu finden und die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks auszurechnen.

Aufgabe 3.5.

- $|AEC| = |AEB|$
- Der Teppich BCE und der Teppich ABC überlappen in BCS. Somit ist BCS flächengleich mit der freien Fläche $(|A_3| + |A_4|)$.
- Die beiden Teppiche bedecken die Quadratflächen vollständig (siehe Carpets Theorem).
- Wenn (ii) gelöst ist, so auch (i)



Aufgabe 3.6. Verbinde P mit Q. Welche Lage in Bezug auf das Quadrat hat diese Strecke? Lässt sich auch sofort eine Aussage über die Länge von PQ machen?

Aufgabe 3.7. Diese Aufgabe ist nicht einfach. Man muss zeigen, dass das Dreieck ANE ähnlich zum Dreieck CMF ist.

Aufgabe 3.8. Finde ähnliche Dreiecke mit parallelen Seiten und bekanntem Größenverhältnis, bzw. benutze den Strahlensatz.

Aufgabe 3.9. Die Schnittpunkte von AO und BO mit PE und PD seien X und Y. Das Viereck $PYOX$ ist ein Parallelogramm.

Aufgabe 3.10. Diese Aufgabe kann man lösen, wenn man einen Satz aus der Satzgruppe des Pythagoras verwendet. (Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz)

Aufgabe 3.11. Die Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks und den Satz von Thales gilt es hier auszunützen. Achtung: Der Beweis ist in beiden Richtungen zu führen.

Aufgabe 3.12. Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass $\angle CAP = \angle CBP$. Suche nach kongruenten Dreiecken.

Aufgabe 3.13. Der Winkel von t zur Seite AB ist $\gamma = \angle ACB$ (Peripheriewinkelsatz).

Bleibt nur zu zeigen, dass der Winkel $\angle BED$ ebenfalls γ ist.

Aufgabe 3.14. Sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Der Schnittpunkt von CM mit k sei I. Das Dreieck ACB ist gleichschenkelig. Es genügt zu zeigen, dass AI den Winkel $\angle BAC$ halbiert.

Aufgabe 3.15. Peripheriewinkelsatz in zwei der drei Kreise anwenden.

Aufgabe 3.16. Bei dieser Aufgabe spielt der Peripheriewinkelsatz eine wichtige Rolle. Zeige zunächst, dass die Punkte A, B, T und U auf einem Kreis liegen. Dann zeige, dass die Punkte A, S, U und B auf demselben Kreis liegen.

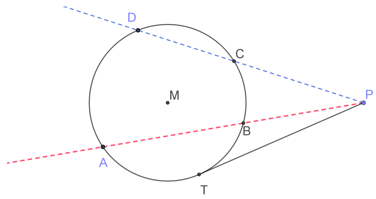
Den zweiten Teil der Aufgabe kann man mit dem Südpolsatz zeigen.

Aufgabe 3.17. Peripheriewinkelsatz; insbesondere jener Teil des Satzes, der eine Aussage über den Winkel zwischen der Sehne und der Tangente in einem Sehnenendpunkt macht.

Aufgabe 3.18.

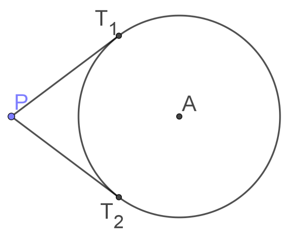
Sehnen-Tangentensatz anwenden:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2$$



Aufgabe 3.19.

Die Länge der Tangentenabschnitte (Entfernung eines Punktes P, der außerhalb eines Kreises k liegt, vom Berührpunkt der Tangente) ist für beide Tangenten gleich groß.



Aufgabe 4.1: Wir suchen Zahlen, die sehr wenige Teiler haben...

Aufgabe 4.2: Wenn k ein Teiler von n ist, dann ist kd ein Teiler von nd.

Aufgabe 4.3. Verwende die Teilbarkeitsregel durch 9. Wie lautet sie?

Aufgabe 4.4. Verwende die Summenformel

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

und die Primfaktorzerlegung von $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$.

Aufgabe 4.5. Wie wirkt sich die Ziffernsummenbildung von a und b auf die Ziffernsummenbildung von $a \cdot b$ aus?

Aufgabe 4.6. Die Gaußsche Summenformel besagt $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Wann ist dieser Ausdruck durch 3 teilbar? Im Fall, dass eine solche Aufteilung möglich ist, versuche sie zu konkret zu finden und zu beschreiben.

Aufgabe 4.7. Kann man den abstrakten Ausdruck für die Summe der grünen Zahlen faktorisieren? Verwende die Primfaktorzerlegung von 40.

Aufgabe 4.8. Primfaktorzerlegung

Aufgabe 4.9. Experimentiere mit kleinen Zahlen, etwa $n \leq 20$, und stelle eine Vermutung auf.

Aufgabe 4.10. $x = \frac{p}{q}$ einsetzen.

Setze voraus, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.

Aufgabe 4.11. Sei $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$, dann gilt $x^2 = 2+3-2\sqrt{6} = 5-2\sqrt{6}$. $(x^2-5)^2 = \dots$.

Aufgabe 4.12. Finde ein Vielfaches von $n-1$, das „nahe“ an n^3+1 ist.

Aufgabe 4.13. Analysiere das Produkt aller Teiler von n für z.B. $n=20$ und verstehe, warum $20^3 = 20^{\tau(20)/2}$ das Ergebnis ist.

Aufgabe 4.14. Sobald einer der Spieler einen Teiler nennt, der durch 2^{34} oder 5^{67} teilbar ist, gewinnt der darauf folgende Spieler, indem er die jeweils andere Zahl sagt.

Aufgabe 4.15. Welche Einerziffer kommt in Betracht? Betrachte anschließend die Gleichung unter einem geeigneten Modul

Aufgabe 4.16. Finde zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen, die den Ausdruck „einsperren“.

Aufgabe 4.17. Betrachte modulo 3.

Aufgabe 4.18. Denke über den Rest bei Division durch 5 und Division durch 3 nach.

Aufgabe 4.19. Welche Reste lässt eine Quadratzahl bei der Division durch 4?

Aufgabe 4.20. Betrachte die Gleichung (mod 3) oder (mod 6).

Aufgabe 4.21. Faktorisierung

Aufgabe 4.22. Faktorisiere den Term.

Aufgabe 4.23. Faktorisiere den Term. Das ist hier etwas schwieriger als bei Aufgabe 4.22. Deshalb ist der „Trick 47“ angebracht: Multipliziere zuerst die Gleichung mit 3. (Warum 3?)

Aufgabe 4.24. Faktorisiere die linke Seite der Gleichung mittels

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Anschließend hoch 2, hoch 3, ...
Leider muss man das Auftreten einer Wurzel in Kauf nehmen.

Aufgabe 4.25: Dies ist nur möglich, wenn $b = \frac{a^3-2}{a-2}$ eine ganze Zahl ist. Man vermutet, dass dies nur selten möglich ist und benutzt Ideen aus Aufgabe 4.12.

Aufgabe 4.26. Es geht um gerade oder ungerade. Zwei Fälle sind möglich.

Aufgabe 4.27. Entweder: Die Gleichung ist linear in x.

Oder: Behandle die Gleichung als quadratische Gleichung in y. Was lässt sich über die sich ergebende Diskriminante sagen?

Aufgabe 4.28. Zählen!

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1.1.

Sei x die Anzahl der bestellten Karten. Am ersten Tag hat sie $0{,}1 \cdot x$ gestaltet, und $0{,}9 \cdot x$ sind übrig geblieben.

Am zweiten Tag gestaltete sie $0{,}25 \cdot 0{,}9 \cdot x = 0{,}225 \cdot x$, und $0{,}675 \cdot x$ sind übrig geblieben.

Am dritten Tag gestaltete sie $0{,}4 \cdot 0{,}675 \cdot x = 0{,}27 \cdot x$, und $0{,}405 \cdot x$ sind übrig geblieben.

Deshalb gilt $0{,}405 \cdot x = 81$, d.h. $x = \frac{81}{0{,}405} = 200$. Also wurden 200 Karten bestellt.

Aufgabe 1.2.

Wenn 10 Arbeiter den ganzen Auftrag in 15 Tagen fertigstellen würden, dann würde ein Mann $10 \cdot 15 = 150$ Tage dafür brauchen. Das heißt, dass ein Mann $\frac{1}{150}$ des Auftrags an einem Tag schaffen würde. 6 Arbeiter machen dann $\frac{6}{150}$ des Auftrags an einem Tag. Ähnlich sehen wir, dass 8 Arbeiter $\frac{24}{150}$ des Auftrags in 3 Tagen fertigstellen würden. 12 Arbeiter haben x Tage gearbeitet und $1 - \frac{30}{150} - \frac{24}{150} = \frac{96}{150}$ des Auftrags fertiggestellt. Daher ist $120 \cdot x = 96$, und $x = 8$. Nun ist der ganze Auftrag in $5+3+x = 16$ Tagen fertiggestellt.

Aufgabe 1.3.

Um das erste Gleichungssystem zu lösen, addieren wir jeweils zwei Zeilen, um

$$7 = 2a + b + c = 2a + 5 \Leftrightarrow a = 1$$
$$8 = a + 2b + c = 2b + 4 \Leftrightarrow b = 2$$
$$9 = a + b + 2c = 2c + 3 \Leftrightarrow c = 3$$

zu erhalten. Diese Methode kann im zweiten Gleichungssystem nicht sofort zum Erfolg führen, weil, wie wir sehen werden, mehr als eine Lösung existiert. Stattdessen nennen wir $a = t$ (nur, um dessen spezielle Rolle hervorzuheben), und berechnen weiter

$$a + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - t$$
$$a + d = 5 \Leftrightarrow d = 5 - t$$
$$c + d = 7 \Leftrightarrow c + 5 - t = 7 \Leftrightarrow c = 2 + t.$$

Für jede Wahl von t löst $(a, b, c, d) = (t, 3-t, 2+t, 5-t)$ das Gleichungssystem. Genau die gleiche Methode führt im letzten Gleichungssystem zu $(a, b, c, d) = (t, 4-t, 2+t, 5-t)$, was aber die Gleichung $b+c=5$ nie erfüllt! (Das ist nicht so überraschend, denn diese Gleichung haben wir in unserer Argumentation gar nicht verwendet.) Also gibt es keine Lösung.

Aufgabe 1.4.

Weil alle Zahlen positiv sind, ist Quadrieren eine Äquivalenzumformung, und aus der letzten Zeile folgt $abc = 36$. Multipliziert man das mit der ersten Zeile, so erhält man $ab+bc+ac = 36$. Zusammen mit $a+b+c = 11$ sind das alle Gleichungen, die wir brauchen, um den Satz von Vieta (genauer gesagt, dessen Umkehrung) anzuwenden. Also sind a, b und c Lösungen der polynomiellen Gleichung $x^3 - 11x^2 + 36x - 36$. Ausprobieren ergibt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$, woraus $x_3 = 6$ folgt (etwa mit $x_1+x_2+x_3 = 11$). Also sind alle Lösungen durch Vertauschungen von $(a, b, c) = (2, 3, 6)$ gegeben.

Aufgabe 1.5.

Legen wir fest, dass $x_2 = x_1 + 1$. Nach dem Satz von Vieta wissen wir, dass $x_1 + x_2 = -p$ gilt, also $-2x_1 - 1 = p$. Gleichzeitig gilt $x_1x_2 = x_1(x_1 + 1) = q$, also $x_1^2 + x_1 = q$. Unterscheiden wir nun zwei Fälle: Wenn $q = p - 1$ gilt, dann erhalten wir $x_1^2 + x_1 = q = p - 1 = -2 - 2x_1$, also löst x_1 die quadratische Gleichung $x_1^2 + 3x_1 + 2 = 0$. Die zwei Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 = -1$ und $x_1 = 2$. Im anderen Fall $q = p+1$ erhalten wir $x_1^2 + x_1 = q = p+1 = -2x_1$, was auf die quadratische Gleichung $x_1(x_1+3) = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_1 = 3$ führt. In jedem Fall ist x_1 ganzzahlig, also auch $x_2 = x_1 + 1$ und damit auch $p = -x_1 - x_2$ und $q = x_1x_2$.

Aufgabe 1.6.

Seien $a-1$, a und $a+1$ die drei ganzzahligen Lösungen der Gleichung. Die gegebene Gleichung ist normiert (d.h. der führende Koeffizient ist 1). Also ist die Gleichung nach der Verallgemeinerung des Satzes von Vieta identisch zu

$$(x - (a-1)) \cdot (x - a) \cdot (x - (a+1)) = 0$$

Wir peilen einen Koeffizientenvergleich an:

$$\begin{aligned}(x-(a-1))\cdot(x-a)\cdot(x-(a+1)) &= (x-a)\cdot((x-a)^2-1)=0\\ &= (x-a)^3-(x+a)=0\\ &= x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-x+a=0\\ &= x^3-3ax^2+(3a^2-1)x+a-a^3=0\end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt

$$x^3-px^2+11x+q=0$$

und somit $-p=-3a, 3a^2-1=11$ und $a-a^3=-q$.

Wir erhalten $a\in\{\pm 2\}$ und unterscheiden die beiden Fälle:

$a=2$: $p=6$ und $q=6$, $\mathbb{L}=\{1,\ 2,\ 3\}$.
$a=-2$: $p=-6$ und $q=-6$, $\mathbb{L}=\{-3,\ -2,\ -1\}$.

Aufgabe 1.7.

Damit wir auf ein ganzzahliges vollständiges Quadrat ergänzen können, multiplizieren wir die Gleichung mit 4 und schreiben $4a^2=(2a)^2=4b^2+28b+7^2-7^2=(2b+7)^2-49$. Bringen wir alle Unbekannten auf die rechte Seite, so ergibt sich $(2b+7)^2-(2a)^2=49$, und mit der dritten binomischen Formel $(2b+7-2a)(2b+7+2a)=49$. Es sind also $2b+7-2a$ und $2b+7+2a$ ganzzahlige Teiler von 49. Wenn wir sie mit d_1 und d_2 benennen, erhalten wir $a=\frac{d_2-d_1}{4}$ und $b=\frac{d_2+d_1-14}{4}$. Setzt man alle Paare von Teilern (d_1,d_2) mit 49 in diese Formeln ein, so erhält man $(a,b)\in\{(-12,-16);(0,-7);(12,-16);(-12,9);(0,0);(12,9)\}$, und die Probe beweist, dass alle diese Paare tatsächlich Lösungen sind.

Aufgabe 1.8.

Da die Teiler verschieden sein müssen, muss einer der Teiler größer als $\frac{n}{3}$ sein, weil aber 2 der kleinstmögliche positive Teiler von n ist, ist $\frac{n}{2}$ der einzige mögliche größere Teiler. Die Bedingung, dass der andere Teiler denselben Abstand von $\frac{n}{3}$ hat, heißt, dass er

$$\frac{n}{3}-\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{3}\right)=n\cdot\left(\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{n}{6}$$

sein muss. Das heißt, dass n durch 6 teilbar (und verschieden von 0) sein muss, und genau dann gibt es mit $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{6}$ auch zwei verschiedene Teiler, die die gewünschte Eigenschaft haben.

Aufgabe 1.9.

Durch Multiplizieren mit dem Nenner $x+y$ erhalten wir $x^2+y^2=10x+10y$. Bringen wir alles auf die linke Seite, so erhalten wir $x^2-10x+y^2-10y=0$. Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat führt auf $x^2-10x+25+y^2-10y+25=(x-5)^2+(y-5)^2=50$. Wir wollen also 50 als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen. Ausprobieren aller kleineren Quadratzahlen $1, 4, 9, 16, 25, 49$ führt auf die Möglichkeiten $(\pm 1)^2+(\pm 7)^2=(\pm 5)^2+\pm(5)^2=(\pm 7)^2+(\pm 1)^2=50$, also auf die Lösungen $(x,y)\in\{(-2,4);(4,-2);(-2,6));(6,-2);(10,0);(0,10);(10,10);(6,12);(12,6);(4,12);(12,4)\}$.

Aufgabe 1.10.

Es gilt $a>1$ und $b>1$. Wir quadrieren die Gleichung und erhalten

$$a-1+2\sqrt{a-1}\sqrt{b-1}+b-1=ab-1$$

also

$$2\sqrt{a-1}\sqrt{b-1}=ab-a-b+1.$$

Den Term $ab-a-b+1$ kann man als Produkt $(a-1)(b-1)$ anschreiben (Rechteckszerlegung). Damit ist die obige Gleichung zu

$$4(a-1)(b-1)=(a-1)^2(b-1)^2$$

äquivalent. Für $a=1$ oder $b=1$ erhalten wir die Lösungspaare $(1,k)$ und $(k,1)$ mit k ganzzahlig und $k\geq 1$. Für $a\neq 1$ und $b\neq 1$ können wir durch $(a-1)(b-1)$ kürzen und es ergibt sich

$$4=(a-1)(b-1).$$

Die Zahl 4 lässt sich als Produkt von zwei positiven ganzen Zahlen nur in der Form $4=1\cdot 4$ und $4=2\cdot 2$ darstellen. Damit ergeben sich folgende weitere positiven ganzzahligen Lösungspaare (2, 5), (5, 2) und (3, 3).

Aufgabe 1.11.

Sei x die Anzahl der Wassermelonen und y die Anzahl der Honigmelonen, die Jure hat. Wenn er ein Viertel der Wassermelonen und die Hälfte der Honigmelonen verkaufen würde, würde er $\frac{x}{4}\cdot 8+\frac{y}{2}\cdot 6$ Euro bekommen. Wenn er ein Zwölftel der Wassermelonen und drei Viertel der Honigmelonen verkauften wr̃de, würde er $\frac{x}{12} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot y \cdot 6$ Euro bekommen. Nach der Voraussetzung gilt

$$\frac{x}{4} \cdot 8 + \frac{y}{2} \cdot 6 = \frac{x}{12} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot y \cdot 6$$

und

$$8x - 6y = 192.$$

Nach der Multiplikation der ersten Gleichung mit 6 erhalten wir

$$12x + 18y = 4x + 27y \implies 8x - 9y = 0.$$

Wir lösen das System

$$8x - 9y = 0 \tag{1}$$

$$8x - 6y = 192 \tag{2}$$

und erhalten

$$x = 72, \quad y = 64.$$

Jure hat 72 Wassermelonen und 64 Honigmelonen im Garten.

Aufgabe 1.12.

Sei n die Anzahl der Söhne und x der Geldbetrag, den jeder von ihnen bekommen sollte. Dann gilt $n \cdot x = 160000$. Da einer von ihnen auf seinen Teil verzichtet, wird das Geld unter $n-1$ Söhnen verteilt, und jeder von ihnen bekommt $x + 8000$. Deswegen gilt $(n-1) \cdot (x + 8000) = 160000$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&(n-1) \cdot (x + 8000) = n \cdot x \\
&nx + 8000n - x - 8000 = nx \\
&x = 8000n - 8000.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
&n \cdot (8000n - 8000) = 160000 \\
&8000n^2 - 8000n - 160000 = 0 \\
&n^2 - n - 20 = 0 \\
&n^2 - 5n + 4n - 20 = 0 \\
&n \cdot (n-5) + 4 \cdot (n-5) = 0 \\
&(n-5) \cdot (n+4) = 0.
\end{aligned}$$

Da n nicht negativ sein kann, gilt $n = 5$.

Aufgabe 1.13.

Wir faktorisieren die Zeilen wie folgt: $a(b + c) = 3(b + c)$, also $(a - 3)(b + c) = 0$. Daher gilt immer mindestens eine der zwei Bedingung in jeder Zeile der folgenden Tabelle:

$$\begin{array}{ll} a = 3 & b = -c \\ b = 5 & d = -c \\ c = 7 & d = -a \\ d = 9 & b = -a. \end{array}$$

Jeweils drei der Bedingungen auf der rechten Seite führen bereits auf die Lösung $(a, b, c, d) = (t, -t, t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Jeweils drei der Bedingungen auf der linken Seite können nicht zusammen mit der letzten Bedingung auf der rechten Seite eintreten, also führen sie auf die Lösung $(a, b, c, d) = (3, 5, 7, 9)$. Es bleiben noch 6 Fälle, in denen genau zwei Bedingungen der linken Seite und zwei auf der rechten Seite eintreffen, diese erledigen wir am besten mit einer Tabelle:

$$\begin{array}{llll|r} a = 3 & b = 5 & d = -a & b = -a & \text{Keine Lösung,} \\ b = -c & b = 5 & c = 7 & b = -a & \text{Keine Lösung,} \\ b = -c & d = -c & c = 7 & d = 9 & \text{Keine Lösung,} \\ a = 3 & d = -c & d = -a & d = 9 & \text{Keine Lösung,} \\ a = 3 & d = -c & c = 7 & b = -a & \text{(a,b,c,d) = (3,-3,7,-7),} \\ b = -c & b = 5 & d = -a & d = 9 & \text{(a,b,c,d) = (-9,5,-5,9).} \end{array}$$

Der Grund dafür, dass wir in den ersten vier Fällen keine Lösung erhalten, sind Widersprüche der Form $3 = a = -b$, $b = 5 \neq -3$. Also erhalten wir die Lösungen $(t, -t, t, -t), t \in \mathbb{R}$, $(3, 5, 7, 9)$, $(3, -3, 7, -7)$ und $(-9, 5, -5, 9)$.

Aufgabe 1.14.

Seien $m = a^2 + b^2$ und $n = c^2 + d^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = \\ &= (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Von diesem Resultat gibt es eine Erweiterung von Brahmagupta, die sogenannte Brahmagupta-Identität

$$(a^2+nb^2)(c^2+nb^2) = (ac-nbd)^2 + n(ad+bc)^2 = (ac+nbd)^2 + n(ad-bc)^2$$

Aufgabe 1.15.

Beweis durch vollständige Fallunterscheidung:

- **Fall 1.** $x \in (0,\,1) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 0$. Dann gilt $x^{\lfloor x \rfloor} = x^0 = 1 \neq \frac{9}{2}$.
- **Fall 2.** $x \in [1,\,2) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 1$. Dann gilt $x^{\lfloor x \rfloor} = x \neq \frac{9}{2}$, da $\frac{9}{2} > 2$.
- **Fall 3.** $x \in [2,\,3) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 2$. Dann gilt $x^{\lfloor x \rfloor} = x^2 = \frac{9}{2}$ genau dann, wenn $x = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, was als Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl nicht rational ist.
- **Fall 4.** $x \in [3,\,\infty) \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq 3$. Dann gilt $x^{\lfloor x \rfloor} \geq 3^{\lfloor x \rfloor} \geq 3^3 = 27 > \frac{9}{2}$, also gibt es in diesem Intervall auch kein solches x.

Aufgabe 1.16.

Die Bedingungen $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 10$ und $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 14$ sind äquivalent zu $x \in [100, 121)$ und $y \in [196, 225)$. Für Intervalle positiver reeller Zahlen gilt im allgemeinen $r \in (a,\,b) \Leftrightarrow \sqrt{r} \in (\sqrt{a},\,\sqrt{b})$ sowie $r \in (a,\,b), s \in (c,\,d) \Leftrightarrow r+s \in (a+c,\,b+d)$, was wir uns nun zunutze machen.

$$\begin{aligned} x \in [100,\,121), y \in [196,\,225) &\Leftrightarrow x+y \in [296,\,346) \Leftrightarrow \lfloor x+y \rfloor \in [296,\,345] \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\lfloor x+y \rfloor} \in (\sqrt{296},\,\sqrt{345}) \Leftrightarrow \left\lfloor \sqrt{\lfloor x+y \rfloor} \right\rfloor \in [17,\,18] \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left\lfloor \sqrt{\lfloor x+y \rfloor} \right\rfloor} \in [\sqrt{17},\,\sqrt{18}] \Leftrightarrow \left\lfloor \sqrt{\left\lfloor \sqrt{\lfloor x+y \rfloor} \right\rfloor} \right\rfloor = 4. \end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, dass $\lfloor \sqrt{296} \rfloor = 17$, da $17^2 = 289 \leq 296 < 324 = 18^2$, und dass $\lfloor \sqrt{345} \rfloor = 18$, da $18^2 = 324 \leq 345 < 361 = 19^2$.

Aufgabe 1.17.

Für eine reelle Zahl x und eine ganze Zahl n gilt immer $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$. Das kann man auch leicht beweisen: Weil $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$, folgt klarerweise $\lfloor x\rfloor + n \leq x+n < \lfloor x\rfloor + n + 1$, womit $\lfloor x\rfloor + n$ also die größte ganze Zahl ist, die kleiner oder gleich $x+n$ ist. Wir schließen weiter, dass $\{x+n\} = x+n-\lfloor x+n\rfloor = x+n-\lfloor x\rfloor - n = \{x\}$.

Aus der Gleichung $\lfloor x\rfloor + \{y\} = z$ folgt also $\{z\} = \{\lfloor x\rfloor + \{y\}\} = \{y\}$, und aus den zwei anderen folgt $\{z\} = \{x\}$ und $\{x\} = \{y\}$. Erneutes Einsetzen in die Gleichungen ergibt $z = \lfloor x\rfloor + \{y\} = \lfloor x\rfloor + \{x\} = x$, und analog $x = y$. Wir erhalten also als Lösungsmenge $L = \{(t,\, t,\, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 1.18.

Die Gleichung lässt sich faktorisieren in $\lfloor x\rfloor(\lfloor x\rfloor + 1) = (x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$. Wir bezeichnen $\alpha := \lfloor x\rfloor$ und $\beta := x - \frac{1}{2}$ und betrachten zunächst die allgemeine Gleichung $\alpha(\alpha+1) = \beta(\beta+1)$. Als quadratische Gleichung in α aufgefasst, erhalten wir mit der kleinen Lösungsformel

$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\beta+\beta^2} = -\frac{1}{2} \pm (\beta + \frac{1}{2})$, also $\alpha \in (\beta,\, -1-\beta)$.

Der Fall $\alpha = \beta$ tritt ein, wenn $\lfloor x\rfloor = x - \frac{1}{2}$, was genau für $x \in \{\frac{2n+1}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Der Fall $\alpha = -1-\beta$ würde bedeuten, dass $\lfloor x\rfloor = -\frac{1}{2} - x$. Für $x \geq 0$ gilt aber $\lfloor x\rfloor \geq 0 > -\frac{1}{2} - x$, und für $x < 0$ gilt $\lfloor x\rfloor \leq -1 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} - x$, also tritt dieser Fall nie ein. Wir erhalten also die Lösungsmenge $L = \{\frac{2n+1}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 1.19.

Die einzige solche Zahl ist $\sqrt{2}$, was wir durch vollständige Fallunterscheidung beweisen:

- **Fall 1.** $x \in (-\infty,\, 0) \Leftrightarrow \lfloor x\rfloor \leq -1$. Dann gilt weiter
$$x\lfloor x\rfloor > 0 \Rightarrow \lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor \geq 0 \Rightarrow x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor \leq 0 < \sqrt{2},$$
also gibt es in diesem Fall keine Lösung.
- **Fall 2.** $x \in [0,\, 1) \Leftrightarrow \lfloor x\rfloor = 0$. Dann ist $x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor = 0$, also gibt es auch hier keine Lösung.
- **Fall 3.** $x \in [1,\, 2) \Leftrightarrow \lfloor x\rfloor = 1$. Wir folgern $x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor = x\lfloor x\rfloor = x$, also ist $x = \sqrt{2}$ die einzige Lösung in diesem Fall.
- **Fall 4.** $x \in [2,\, \infty) \Leftrightarrow \lfloor x\rfloor \geq 2$. Weil die Gaußklammer eine monotone Funktion ist, erhalten wir $x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor \geq x\lfloor 2x\rfloor = 4x \geq 8 > \sqrt{2}$, also keine Lösung.

Aufgabe 1.20.

Für negatives x ist die linke Seite negativ, die rechte aber positiv, also gibt es keine solche Lösung. Aus $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor > \frac{x}{2} - 1$, $\lfloor \frac{x}{3} \rfloor > \frac{x}{3} - 1$ und $\lfloor \frac{x}{4} \rfloor > \frac{x}{4} - 1$ können wir schließen, dass $\frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-3}{3} \cdot \frac{x-4}{4} < x^2$, solange $x \geq 4$ gilt. Ausmultiplizieren ergibt $x^3 - 33x^2 + 26x - 24 < 0$. Für $x \geq 33$ ist $x^2(x-33) + 26x - 24$ sicher nicht negativ, also gilt es nur mehr $x \in (0,\, 33)$ zu betrachten. Andererseits gilt auch $x^2 = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{4} \rfloor \leq \frac{x^3}{24}$, woraus sofort folgt, dass entweder $x = 0$ oder $x \geq 24$. Eine Lösung ist tatsächlich durch $x = 0$ gegeben.

Wenn $x \in [k,\, k+1)$ für eine natürliche Zahl k gilt, so ist $\lfloor \frac{x}{m} \rfloor = \lfloor \frac{k}{m} \rfloor$ für $m \in \{2,\, 3,\, 4\}$, da einerseits $\lfloor \frac{k}{m} \rfloor \leq \frac{k}{m} \leq \frac{x}{m}$ gilt und andererseits $\lfloor \frac{k}{m} \rfloor + 1 \geq \frac{k}{m} - \frac{m-1}{m} + 1 > \frac{x}{m}$. Wir können also die Fälle $x \in [k,\, k+1)$ für $k \in \{24,\, \ldots,\, 32\}$ unterscheiden und untersuchen jedes Mal, ob $\sqrt{\lfloor \frac{x}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \cdot \lfloor \frac{x}{4} \rfloor}$ im Intervall $[k,\, k+1)$ liegt. Dies ist zweimal der Fall, und zwar für $k = 24$ und $k = 29$. Insgesamt ergibt sich die Lösungsmenge $L = \{0,\, 24,\, 29\}$.

Aufgabe 1.21.

Die Signumfunktion ist definiert als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Für $x > 1$ gilt: $x + |x| + [x] + \operatorname{sgn}(x) > 1 + 1 + 1 + 1 = 4 > 2$ also keine Lösung.

Für $x < 0$ gilt: $x + |x| = 0$ und somit $[x] + \operatorname{sgn}(x) \leq -1 + (-1) = -2 \neq 2$.

Für $0 < x < 1$ gilt: $[x] = 0, x = |x|$ und $\operatorname{sgn}(x) = 1$, also: $x + |x| + [x] + \operatorname{sgn}(x) = 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Somit ist $x = \frac{1}{2}$ die einzige Lösung der Gleichung.

Aufgabe 1.22.

Weil der Unterschied von $\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ und $\lfloor x - y \rfloor$ eine ganze Zahl ist, und der Dezimalanteil von Zahlen, die sich um eine ganze Zahl unterscheiden, gleich ist, gilt $\{\{x\} - \{y\}\} = \{x - \lfloor x \rfloor - y - \lfloor y \rfloor\} = \{x - y - \lfloor x - y \rfloor\} = \{x - y\}$. Ganz genauso beweist man, dass $\{m \cdot x\} = \{m \cdot \{x\}\}$ gilt.

Zunächst lösen wir den Fall $b = 0$. Wir betrachten die Folge $\{a\}$, $\{2a\}$, $\ldots$, $\{qa\}$. Das sind q Zahlen zwischen 0 und 1, also haben zwei davon einen Abstand von weniger als $\frac{1}{q}$ (sonst wäre ja der Abstand von der kleinsten und größten Zahl mindestens $q \cdot \frac{1}{q} = 1$). Sei nun $k \neq l$ solche Zahlen aus $\{1, \ldots, q\}$ mit $0 < \{ka\} - \{la\} < \frac{1}{q}$. Dann gilt auch $0 < \{(k-l)a\} < \frac{1}{q}$. Falls $k > l$, so haben wir schon eine Annäherung für $b = 0$ gefunden. Falls $k < l$, betrachten wir die Zahl $\{\lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \rfloor (l-k)a\}$. Es gilt

$$\left\{ \left\lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \right\rfloor (l-k)a \right\} = \left\{ \left\lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \right\rfloor \{(l-k)a\} \right\} = \left\{ \left\lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \right\rfloor (1 - \{(k-l)a\}) \right\} = \left\{ 1 - \left\lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \right\rfloor \{(k-l)a\} \right\} = 1 - \left\lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \right\rfloor \{(k-l)a\} \in (0, \{(k-l)a\})\,,$$

da aus der Definition der Gaußklammer einerseits $1 > 1 - \lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \rfloor \{(k-l)a\} > 0$ und andererseits $1 - (\lfloor \frac{1}{\{(k-l)a\}} \rfloor + 1) \{(k-l)a\} < 0$ folgt. Also haben wir hier ebenfalls eine Annäherung an $b = 0$ gefunden.

Für allgemeines $b \in (0, 1]$ nehmen wir nun eine Zahl $k > 0$ sodass $0 < \{ka\} < \frac{1}{q}$ und stellen fest, dass $\{\lfloor \frac{b}{\{ka\}} \rfloor ka\}$ eine passende Annäherung ist, weil ähnlich wie vorhin $0 < \lfloor \frac{b}{\{ka\}} \rfloor \{ka\} < 1$ und $\lfloor \frac{b}{\{ka\}} \rfloor \{ka\} \leq b < (\lfloor \frac{b}{\{ka\}} \rfloor + 1)\{ka\}$ gilt.

Aufgabe 1.23.

Angenommen, es gelte $x + y \leq 2$. Nach der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt $1 \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, also auch $xy \leq 1$, mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y = 1$. Also gilt $x + y + xy \leq 3$, mit Gleichheit genau dann, wenn $x = y = 1$. Im Umkehrschluss gilt also $x + y \geq 2$ wenn $x + y + xy \geq 3$, mit Gleichheit genau dann wenn $x = y = 1$.

Aufgabe 1.24.

Die linke Ungleichung ist immer erfüllt, da $0 \leq 2(a-b)^2 = 2(a^2+b^2) - 4ab$ für alle reellen Zahlen a, b gilt. Die Nebenbedingung ist äquivalent zu $a \leq 2b$ und $b \leq 2a$, ist also eigentlich symmetrisch in a und b, genauso wie die Ungleichung selbst. Damit dürfen wir o.B.d.A annehmen, dass $a \leq b$ gilt. Aus $b \leq 2a$ folgt sowohl $b - a \leq a$ als auch $2b - 2a = b + (b - 2a) \leq b$, und da $b - a$ positiv ist, können wir die zwei Ungleichungen miteinander multiplizieren und erhalten $2(b-a)^2 \leq ab$, was mit der binomischen Formel äquivalent zu $2(b^2 + a^2) \leq 5ab$ ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn $b = 2a$ gilt. Falls $b \leq a$, so tritt der Gleichheitsfall bei $a = 2b$ ein.

Aufgabe 1.25.

Nach der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$. Ebenso nach AM-GM gilt $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \geq 2\sqrt{a^2b^0} = 2a$, also $(a+b)\sqrt{\frac{a}{b}} \geq 2a$, womit insgesamt

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \geq \frac{4a}{a+b}$$

folgt, mit Gleichheit genau dann, wenn $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ und $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$. Die letztere Bedingung ist äquivalent zu $a = b$, und damit folgt aus der ersteren $a = b = c$ als einziger Gleichheitsfall.

Aufgabe 1.26.

1. Lösung:

$$\begin{aligned}
&a^4 + 3b^4 > 3ab^3 + ab^3 \\
\Leftrightarrow &a(a^3 - b^3) + 3b^3(b - a) > 0 \\
\Leftrightarrow &a(a-b)(a^2 + ab + b^2) - 3b^3(a-b) > 0 \\
\Leftrightarrow &(a-b) \cdot (a^3 + a^2b + ab^2 - 3b^3) > 0
\end{aligned}$$

$a > b$: Dann gilt: $a^3 > b^3$, $a^2b > b^3$ und $ab^2 > b^3$. Also ist auch die zweite Klammer positiv und somit auch die linke Seite der Gleichung.

$b < a$: Gleiche Vorgangsweise, aber diesmal sind beide Klammern negativ und somit das Produkt wiederum positiv.

2. Lösung: Beide Seiten der Ungleichung stellen vierte Potenzen dar. Division durch den positiven Faktor $4ab^3$ liefert

$$\frac{a^4}{4ab^3} + \frac{3b^4}{4ab^3} > 1$$

Wir setzen $0 < \frac{a}{b} := x$ (mit $x \neq 1$ da $a \neq b$) ein und erhalten

$$\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4x + 3 > 0$$

Faktorisieren führt auf $(x-1)^2 \cdot (x^2 + 2x + 3) > 0$ bzw. $(x-1)^2 \cdot ((x+1)^2 + 2) > 0$. Das ist selbstverständlich erfüllt, da die erste Klammer durch Quadrieren sicher positiv ist und der zweite Ausdruck mindestens 2 ist.

3. Lösung: Arithmetisch-Geometrische Mittelungleichung für vier Variablen:

$$\frac{a^4 + b^4 + b^4 + b^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4b^{12}} = ab^3$$

Gleichheit würde nur für $a^4 = b^4$ gelten, und da a und b positiv sind, ist das gleichbedeutend mit $a = b$. Da dieser Fall nicht angenommen werden kann, ist das AM größer als das GM.

Aufgabe 1.27.

Es gilt $a > b$, da sonst die rechte Seite der Gleichung nicht positiv wäre.

Wir verwenden die Zerlegung von $a^3 + b^3$ und die Nebenbedingung:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(\underbrace{a^2 - ab + b^2}_{K}) = a - b$$

Da $a + b > a - b$ gilt, muss $K < 1$ sein.

Die Zerlegung der Differenz zweier dritter Potenzen ist:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

und somit gilt

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} < 1$$

Subtraktion von ab liefert die gewünschte Ungleichung, denn

$$a^2 + b^2 < 1 - ab < 1$$

Aufgabe 1.28.

- Man kann die Aufgabe mit der arithmetisch- geometrischen Mittelungleichung lösen:
$$\frac{a^3 + b^3 + a + b}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 b^4} = ab.$$
- Es gilt $a^2 + 1 \geq 2a$ und analog $b^2 + 1 \geq 2b$. Daher gilt
$$a^3 + b^3 + a + b = a(a^2 + 1) + b(b^2 + 1) \geq 2a^2 + 2b^2$$
und mit
$$2a^2 + 2b^2 \geq 4ab \iff (a - b)^2$$
ist alles gezeigt.

Aufgabe 1.29.

Multipliziert man die Ungleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(x+xy)(y+xy)(x+2xy+y) > 0$, so vereinfacht sich die Ungleichung zu

$$(x-y)^2 \geq 0.$$

Aufgabe 1.30.

Es gilt: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ und daraus folgt $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 0$. Mit der Bedingung $a^2+b^2+c^2 = 1$ folgt daraus

$$-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca.$$

Die zweite Ungleichung folgt sofort aus $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 = 1$.

Aufgabe 1.31.

Wir verwenden die arithmetisch- geometrische Ungleichung $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ und verschärfe die Ungleichung indem wir $2\sqrt{xy}$ einsetzen.

$$\frac{(2\sqrt{xy})^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

Das ist äquivalent zu

$$xy - 4\sqrt{xy} + 4 \geq 0$$

also zu

$$(\sqrt{xy} - 2)^2 \geq 0.$$

Gleichheit gilt für $x = y = 2$.

Aufgabe 1.32.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $a+b < 0$
  Da $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}$ für alle reellen Zahlen positiv ist, ist die linke Seite der Gleichung negativ und die rechte positiv und die Ungleichung bewiesen.
- $a+b > 0$

Wir können die Betragsstriche weglassen und mit dem gemeinsamen Nenner $(a^2 - ab + b^2)(a + b) > 0$ multiplizieren.

Wir erhalten

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 4a^2 - 4ab + 4b^2.$$

Das ist aber äquivalent zu

$$0 \leq (a - b)^2.$$

Gleichheit gilt für $a = b > 0$.

Aufgabe 1.33.

Mit der geometrisch-arithmetischen Mittelungleichung folgt

$$(a + c)(b + 1) \leq \frac{(a + b + c + 1)^2}{4}.$$

Weiters gilt mit der arithmetisch- quadratischen Mittelungleichung

$$\frac{a + b + c + 1}{4} \leq \sqrt[4]{\frac{a^2 + b^2 +^2 +1}{4}} = 1,$$

also

$$a + b + c + d \leq 4.$$

Zusammen mit der oberen Ungleichung folgt die Behauptung.

Gleichheit gilt für $a = b = c = 1$.

Aufgabe 1.34.

Multipliziert auf der linken Seite aus und ersetzt dann die 4 durch $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ so erhält man

$$ab + 2a + 2b + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq cd.$$

Folgende Ungleichungen sind nun äquivalent:

$$\begin{aligned} 2ab + 4a + 4b + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2cd &\geq 0 \\ (a + b + 2)^2 - 4 + (c - d)^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &\geq 0 \\ (a + b + 2)^2 + (c - d)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt für $a+b=-2$, $c=d$ und $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, also etwa für das Quadrupel $(-1,-1,1,1)$.

Aufgabe 1.35.

Wenn alle drei Zahlen größer oder gleich 3 sind, so ist die linke Seite kleiner oder gleich 1.

Also muss mindestens eine der drei Zahlen aus der Menge $\{1;\ 2\}$ sein.

1. Fall: $a=1$

   In diesem Fall sind für b und c jede Auswahl zielführend:
   $L_1=\{(1;\ u;\ v)$ mit u und v ganzzahlig$\}$.

2. Fall: $a=2$

   Die Gleichung lautet:
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
   Wenn beide Zahlen b und c größer oder gleich 4 sind, so ist die linke Seite höchstens $\frac{1}{2}$, dies führt also zu keiner Lösung.

   Also ist eine der beiden Zahlen kleiner oder gleich 3.

   2a) $b=1$: Dann ist c beliebig, Lösung ist im 1. Fall bereits dargestellt.
   2b) $b=2$: Dann ist c beliebig, $L_2=\{(2;\ 2;\ t)$ mit t ganzzahlig$\}$
   2c) $b=3$: Dies führt auf $\frac{1}{c}>\frac{1}{6}$, also $c<6$, $c\in\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$
   $L_3=\{(2;\ 3;\ 1),(2;\ 3;\ 2),(2;\ 3;\ 3),(2;\ 3;\ 4),(2;\ 3;\ 5)\}$

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$L_{\text{ges}}=\{(1;\ u;\ v);(2;\ 2;\ t);(2;\ 3;\ 3);(2;\ 3;\ 4);(2;\ 3;\ 5)\}_{\text{Perm}}$$

Bemerkung. Perm bedeutet, dass jede Permutation einer Lösung ebenfalls Lösung der Ungleichung ist. In anderen Worten: ist das Tripel $(x;y;z)$ Lösung, so auch $(x;z;y)$, $(y;x;z)$, $(y;z;x)$, $(z;x;y)$ und $(z;y;x)$.

Aufgabe 1.36.

Mittels AM-GM Mittelungleichung gilt:

$$\frac{a^8+b^8}{2} \geq \sqrt{a^8b^8} = a^4b^4$$
$$\frac{b^8+c^8}{2} \geq \sqrt{b^8c^8} = b^4c^4$$
$$\frac{c^8+a^8}{2} \geq \sqrt{c^8a^8} = c^4a^4$$

Addiert man diese drei Ungleichungen ergibt das

$$\frac{2a^8+2b^8+2c^8}{2} \geq a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 \tag{3}$$

Wendet man nun wiederum die AM-GM Mittelungleichung auf die Terme der rechten Seite an, erhält man

$$\frac{a^4b^4+b^4c^4}{2} \geq \sqrt{a^4b^8c^4} = a^2b^4c^2$$
$$\frac{b^4c^4+c^4a^4}{2} \geq \sqrt{a^4b^4c^8} = a^2b^2c^4$$
$$\frac{a^4b^4+c^4a^4}{2} \geq \sqrt{a^8b^4c^4} = a^4b^2c^2$$

Addiert man diese drei Ungleichungen, so erhält man

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 \geq a^2b^4c^2+a^2b^2c^4+a^4b^2c^2 = a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2) \tag{4}$$

Wir verwenden nun die bekannte Ungleichung $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ und erhalten somit zusammen mit (3) und (4) die Ungleichung

$$a^8+b^8+c^8 \geq a^2b^2c^2(bc+ca+ac) \quad |: a^3b^3c^3$$
$$\iff \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

was zu zeigen war.

Bemerkung: Es gibt viele Arten, die Gültigkeit für die hier im Beweis verwendete Ungleichung $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ nachzuweisen. Für positive reelle Zahlen a, b, c kann man dieselbe Idee anwenden, die in diesem Beispiel verwendet wurde: Starte mit $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = ab$ usw.
Eine andere Möglichkeit ist die Multiplikation der Ungleichung mit 2 und das Verwenden der 2. Binomischen Formel, um Summen vollständiger Quadrate zu erhalten:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0 \iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

Aufgabe 1.37.

Wir multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner $5(x+3)(x+5) > 0$ und erhalten

$$5(y+3+x+3) \leq 2xy + 6y + 6 + 18$$

Das ist unter Verwendung von $xy = 4$ zu

$$4 \leq x + y$$

äquivalent. Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt

$$2 = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

und daraus ergibt sich sofort die Richtigkeit der letzten Ungleichung.

Aufgabe 1.38.

Es gilt $x \neq -2$ und $x = 2$ ist keine Lösung der Ungleichung. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

- $|x| > 2$:
  In diesem Fall können wir die Betragsstriche weglassen und erhalten
  $$\frac{x^2-4}{x+2} \geq x.$$
  Das ist zu
  $$x - 2 \geq x$$
  äquivalent und daher gibt es in diesem Fall keine Lösungen.
- $|x| < 2$:
  In diesem Fall lautet die Ungleichung
  $$\frac{4-x^2}{x+2} \geq x.$$
  Das ist zu
  $$2 - x \geq x$$
  äquivalent und es folgt $1 \geq x$. Daher sind alle reellen Zahlen mit $-2 < x \leq 1$ Lösungen dieser Ungleichung.

Aufgabe 1.39.

Behauptung: $x > z > y$.

Wir zeigen $x > z$:

Es gilt $ab+cd > ca+bd \iff a(b-c) > d(b-c) \iff a < d$ und das ist nach Voraussetzung richtig. (Beim letzten Schritt haben wir durch $(b-c) < 0$ dividiert und daher das Ungleichheitszeichen umgedreht.)

Wir zeigen $z > y$:

Es gilt $ca+bd > bc+ad \iff c(a-b) > d(a-b) \iff c < d$ und auch diese Ungleichung ist laut Voraussetzung richtig.

Aufgabe 1.40.

Wir können die Ungleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(a+1)\cdot(b+1) > 0$ multiplizieren. Wir erhalten die äquivalente Ungleichung

$$a^2+b^2 \leq ab+1.$$

Da für jede reelle Zahl t mit $0 \leq t \leq 1$ die Ungleichung $t^2 \leq t$ gilt, genügt es

$$a+b \leq ab+1$$

zu zeigen. Das ist aber zu

$$0 \leq (1-a)\cdot(1-b)$$

äquivalent und wegen $0 \leq a,\, b \leq 1$ richtig. Gleichheit gilt für die Zahlenpaare $(1,\,1)$, $(1,\,0)$ und $(0,\,1)$.

Aufgabe 1.41.

o.B.d.A. kann man annehmen, dass $a \geq b \geq c > 0$ gilt.

Dreiecksungleichung: $c^n + b^n > a^n$

$$c^n > a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ \ldots\ + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

und da $<\geq b \geq c$ weiter

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ \ldots\ + ab^{n-2} + b^{n-1}) \geq n \cdot b^{n-1} \geq n \cdot c^{n-1}$$

Also gesamt:

$$c^n \geq (a-b)\cdot n \cdot c^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad c \geq (a-b)\cdot n$$

Da $a - b$ eine feste, nicht negative Zahl ist, kann diese Ungleichung nicht für alle n gelten, da die rechte Seite beliebig groß wird, wenn n wächst. Es gibt also jedenfalls einen Wert n, sodass der Wert c vom Ausdruck $(a - b) \cdot n$ übertroffen wird, wenn $a - b > 0$ wäre. Somit muss $a - b = 0$ und $a = b$ gelten. Es handelt sich demnach um ein gleichschenkeliges Dreieck.

Aufgabe 1.42.

$A^n - B^n = (A - B) \cdot (A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1})$

Es gilt

$$n \cdot B^{n-1} < A^n - B^n = (A - B) \cdot (A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}) < n \cdot A^{n-1}$$

da jeder der Summanden in der rechten Klammer größer ist als die entsprechende Potenz von B und kleiner ist als die entsprechende Potenz von A. In „mathematischeren" Worten: $B^{n-1} < A^i B^{n-i-1} < A^{n-1}$ für jedes $0 \leq i \leq n - 1$.

Aufgabe 1.43.

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion, weil wir durch das Berechnen kleiner Werte von n die Vermutung aufstellen, dass der Wert S_n immer 1 ist.

Induktionsbasis: Sei $n = 1$. Dann gilt $S_1 = x_1^2 + y_1^2 = 1$.

Induktionsvoraussetzung (I.V.): $S_n = 1$.

Induktionsbehauptung: $S_{n+1} = 1$.

Induktionsschritt: (zeige, dass aus $S_n = 1$ folgt, dass $S_{n+1} = 1$ gilt)

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(\frac{3x_n - 4y_n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4x_n + 3y_n}{5}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{25}(9x_n^2 + 16y_n^2 - 24x_n \cdot y_n + 16x_n^2 + 9y_n^2 + 24x_n \cdot y_n) = \frac{1}{25}(25x_n^2 + 25y_n^2) = \\ &= x_n^2 + y_n^2 \overset{\text{I.V.}}{=} 1. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Induktionsbehauptung aus der Induktionsvoraussetzung folgt, und der Beweis, dass $S_n = 1$ für alle $n \geq 1$ gilt, ist damit abgeschlossen.

Aufgabe 1.44.

Einsetzen der Formel für die geometrische Reihe:

$$1 - x + x^2 - + \ldots - x^{99} + x^{100} = \frac{1-(-x)^{101}}{1-(-x)}$$

und

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} + x^{100} = \frac{1-x^{101}}{1-x}$$

Multiplikation ergibt

$$\frac{1-(-x)^{101}}{1-(-x)} \cdot \frac{1-x^{101}}{1-x} = \frac{1-x^{202}}{1-x^2}$$

Mit $x^2 := t$ ergibt sich

$$\frac{1-t^{101}}{1-t} = 1 + t + \ldots + t^{100} = 1 + x^2 + x^4 + + \ldots + x^{200}$$

Aufgabe 1.45.

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+k)}\right)$$

Wir verwenden, dass $\frac{1}{(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+2)^2}$, $\quad \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} < \frac{1}{(n+2)^3}$ usw.

Somit können wir abschätzen:

$$1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+k)} < 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}}$$

Für $0 < q < 1$ gilt: $1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} < \frac{1}{1-q}$

Wir wählen $q = \frac{1}{n+2}$ und erhalten

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}}\right) < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

Damit ist die Ungleichung gezeigt.

Aufgabe 1.46.

a.) M besteht genau aus allen Zahlen $2^a 3^b$, wobei a und b natürliche Zahlen sind. Multipliziert man somit

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots\right)$$

aus, erhält man die gesuchte Summe. Durch die Formel für unendliche geometrische Summen gilt

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{2-1}=2\\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{3-1}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Die gesuchte Summe ist damit $2\cdot\frac{3}{2}=2$.

b.) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &> \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &> \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{16} &> \frac{1}{16}\cdot 8=\frac{1}{2}\\ &\dots\\ \frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}} &> \frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2^n=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dadurch ist gezeigt, dass die Summe unendlich ist.

c.) Beweisskizze: Angenommen es gäbe nur r Primzahlen $p_1, ..., p_r$. Dann hätte jede Zahl eine Primfaktorzerlegung, die nur aus diesen r verschieden Primfaktoren besteht. Damit könnte man die unendliche Summe in b) berechnen als

$$\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)\cdots\left(\frac{p_r}{p_r-1}\right).$$

Da dies ein endliches Produkt ist, ist es selbst endlich. Ein Widerspruch zu b).

Aufgabe 2.1.

Wir nummerieren die Kugeln mit 1 bis N.

Wir verwenden für die k-te Messung, wenn sie die Kugeln i und j beinhaltet, die Schreibweise $M_k\{i, j\}$. Wird bei einer Messung Radioaktivität festgestellt, so legen wir dafür den Wert von $M_k\{i, j\}$ als 1 fest, ansonsten den Wert 0. (Eine Messung kann natürlich auch nur eine oder auch mehr als zwei Kugeln umfassen.)

Mit $\mu(N)$ bezeichnen wir die mindestens benötigte Anzahl an Messungen, um unter N Kugeln die radioaktive Kugel zu finden.

a.) $N = 2 = 2^1$ Kugeln $\{1, 2\}$.
Eine Messung $M_1\{1\}$ gibt uns die Antwort. Wenn diese positiv ist $(M_1\{1\} = 1)$, ist Kugel 1 radioaktiv. Anderenfalls $(M_1\{1\} = 0)$ ist die Kugel 2 radioaktiv.
Antwort: $\mu(N = 2) = 1$.

b.) $N = 3 = 2^1 + 1$ Kugeln $\{1, 2, 3\}$.

$$M_1\{1,\ 2\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow & \text{die Kugel 3 radioaktiv ist.} \\ 1 \Rightarrow & \text{der Fall } N = 2,\ \mu(N = 2) = 1. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 3) = 2$.

c.) $N = 4 = 2^2$ Kugeln.

$$M_1\{1,\ 2\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow & \text{eine von } \{3, 4\} \text{ radioaktiv ist.} \Rightarrow N = 2, \mu(N = 2) = 1. \\ 1 \Rightarrow N = 2,\ M_2\{1\}. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 4) = 2$.

d.) $N = 5 = 2^2 + 1$ Kugeln.

$$M_1\{1,\ 2,\ 3\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{4, 5\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 2,\ \mu(N = 2) = 1. \\ 1 \Rightarrow N = 3,\ \mu(N = 3) = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 5) = 3$.

$N = 6 = 2^2 + 2$ Kugeln.

$$M_1\{1,\ 2,\ 3\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{4, 5, 6\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 3,\ \mu(N = 3) = 2. \\ 1 \Rightarrow N = 3,\ \mu(N = 3) = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 6) = 3$.

$N = 7 = 2^2 + 3$ Kugeln.

$$M_1\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{5,\ 6, 7\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 3,\ \mu(N = 3) = 2. \\ 1 \Rightarrow N = 4,\ \mu(N = 4) = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 7) = 3$.

e.) $N = 8 = 2^3$ Kugeln.

$$M_1\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{5, 6, 7, 8\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 4,\ \mu(N = 4) = 2. \\ 1 \Rightarrow N = 4,\ \mu(N = 4) = 2. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 8) = 3$.

$N = 9 = 2^3 + 1$ Kugeln.

$$M_1\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{eine von } \{6,7,8,9\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 4,\ \mu(N = 4) = 2. \\ 1 \Rightarrow N = 5,\ \mu(N = 5) = 3. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 9) = 4$.

f.) $N = 11 = 2^3 + 3$ Kugeln.

$$M_1\{1,\ \dots,\ 6\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{dann eine von } \{7, \dots, 11\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 5,\ \mu(N = 5) = 3. \\ 1 \Rightarrow N = 6,\ \mu(N = 6) = 3. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 11) = 4$.

g.) $N = 16$

$$M_1\{1\ \dots,\ 8\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{dann eine von } \{9, \dots, 16\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 8,\ \mu(N = 8) = 3. \\ 1 \Rightarrow N = 8,\ \mu(N = 8) = 3. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 16) = 4$.

h.) $N = 17$

$$M_1\{1,\ \dots,\ 9\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{dann eine von } \{10, \dots, 17\} \text{ radioaktiv ist} \Rightarrow N = 8,\ \mu(N = 8) = 3. \\ 1 \Rightarrow N = 9,\ \mu(N = 9) = 4. \end{cases}$$

Antwort: $\mu(N = 17) = 5$.

Wir sehen, dass sich die Anzahl der benötigten Messungen direkt nach einer 2-er Potenz ($N{=}2^n$) ändert. Wenn $2^{n-1} + 1 \leq N \leq 2^n$, ist Anzahl der Messungen $\mu(N) = n$. Zum Beispiel, für N von 9 bis $2^4 = 16$ brauchen wir 4 Messungen; für N von 17 bis $2^5 = 32$ brauchen wir 5 Messungen; für N von 33 bis $2^6 = 64$ brauchen wir 6 Messungen.

Aufgabe 2.2.

Wir werden eine Kugel oder eine Menge der Kugeln sauber nennen, wenn diese nicht-radioaktiv ist. Außerdem bezeichnen wir als r-Kugel und r-Paar eine radioaktive Kugel und ein radioaktives Paar (d.h. beide Kugeln sind radioaktiv).

a.) Wir fangen mit drei Messungen an: $M_1\{1,\ 2\}$, $M_2\{3,\ 4\}$, $M_3\{5,\ 6\}$. Nur zwei Fälle sind möglich:

(i) Genau zwei Proben davon sind positiv, zum Beispiel $M_1\{1,\ 2\}$ und $M_2\{3,\ 4\}$. Dann haben wir schon die zwei radioaktiven Kugeln geortet: jedes Paar enthält genau eine radioaktive Kugel. Wir finden diese mithilfe der Messungen $M_4\{1\}$ und $M_5\{3\}$.

(ii) Nur eine davon ist positiv, zum Beispiel $M_1\{1,\ 2\}$. Dann enthält dieses Paar entweder beide radioaktiven Kugeln, oder nur eine (und dann ist die 7. Kugel radioaktiv). Weitere

Messungen:

$$M_4\{7\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{Kugeln 1 und 2 sind radioaktiv} \\ 1 \Rightarrow M_5\{1\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{Kugeln 2 und 7 sind radioaktiv} \\ 1 \Rightarrow \text{Kugeln 1 und 7 sind radioaktiv.} \end{cases} \end{cases}$$

b.) Wir messen zuerst die Kugeln $\{1, 2, 3\}$.

(i) Wenn die Probe $M_1\{1, 2, 3\}$ negativ ist, sind zwei von sieben Kugeln $\{4, \ldots, 10\}$ radioaktiv. Wir finden diese mit 5 Messungen.

(ii) Wenn die Probe $M_1\{1, 2, 3\}$ positiv ist, enthält diese Gruppe entweder beide oder nur eine radioaktive Kugel. Wir untersuchen jetzt zwei dieser drei Kugeln: $M_2\{1\}$ und $M_3\{2\}$. Wenn beide diese Proben positiv sind, sind Kugeln 1 und 2 radioaktiv. Wenn nur eine davon positiv ist, zum Beispiel $M_2\{1\}$, ist eine von $8 = 2^3$ Kugeln $\{3, 4, \ldots, 10\}$ radioaktiv. Diese finden wir mit 3 Messungen.

c.) Wir messen zuerst die Kugeln $\{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Wenn die Probe $M_1\{1, 2, 3, 4\}$ negativ ist, sind zwei der sieben Kugeln $\{5, \ldots, 11\}$ radioaktiv. Wir finden diese mit 5 Messungen.

(ii) Wenn die Probe $M_1\{1, 2, 3, 4\}$ positiv ist, enthält diese Gruppe entweder beide oder nur eine radioaktive Kugel. Wir machen jetzt drei Messungen: $M_2\{1\}$, $M_3\{2\}$ und $M_4\{3\}$. Wenn zwei davon positiv sind, sind die entsprechende Kugeln radioaktiv. Wenn nur eine davon positiv ist, zum Beispiel $M_2\{1\}$, ist eine von $8 = 2^3$ Kugeln $\{4, 5, \ldots, 11\}$ radioaktiv. Diese finden wir mit 3 Messungen.

d.) Wir geben zwei Lösungsverfahren für diese Aufgabe an.

Verfahren I. Dieses Verfahren entspricht dem Hinweis.

Wir berechnen zuerst, aus wie vielen möglichen Paaren das r-Paar ausgewählt werden müsste:

$$n = 14 + 13 + 12 + \cdots + 2 + 1 = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105.$$

Also müssen wir die Kugeln so aufteilen, dass jede nächste Messung diese Zahl in etwa halbiert. Fünf Kugeln geben uns $14 + 13 + 12 + 11 + 10 = \frac{24 \cdot 5}{2} = 60$ Varianten, und wenn diese Probe negativ ist, bleiben $105 - 60 = 45$ Varianten. Das wäre eine guter Anfang. Also ist die erste Messung $M_1\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wenn diese negativ ist, gehören beide gesuchten Kugeln der Menge $\{6, 7, \ldots, 15\}$ an, und wir müssen zwei aus zehn Kugeln finden; das haben wir schon früher mit 6 Messungen gemacht. Wenn diese Probe positiv ist, wählen wir Kugeln für die nächste Probe, und versuchen immer, die Anzahl der möglichen radioaktiven Paare auf zwei relativ gleiche Teile aufzugliedern.

(Diese Methode findet bei vielen Problemstellungen Anwendungen und wird oft mit Divide & Conquer (Teile und herrsche) bezeichnet. In diesem Fall ist diese Methode allerdings viel komplizierter als eine andere Möglichkeit zur Lösung. Deshalb geben wir bei dieser Aufgabe ein zweites Lösungsverfahren an.)

Verfahren II. Wir teilen alle 15 Kugeln in vier Gruppen *mit Wiederholungen* auf:

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{1, 6, 7, 8, 9\}$
$\{1, 10, 11, 12, 13\}$
$\{14, 15\}$
(die ersten drei Mengen enthalten eine gemeinsame Kugel, nämlich $\{1\}$). Die erste drei Messungen sind:
$M_1\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$M_2\{1, 6, 7, 8, 9\}$
$M_3\{1, 10, 11, 12, 13\}$.
Folgende vier Ergebniskombinationen sind möglich:

(i) Alle drei Proben sind negativ. Dann ist $\{14, 15\}$ das gesuchte r-Paar.

(ii) Zwei negative und eine positive Probe. Das bedeutet, dass Kugel $\{1\}$ sauber ist, und dass andere vier Kugeln $\{a, b, c, d\}$ aus der positiven Gruppe zusammen mit $\{14, 15\}$ beide radioaktiven Kugeln enthalten. Nächste Messung:

$$M_4\{14, 15\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} \text{Messungen } M_5\{a\},\ M_6\{b\},\ M_7\{c\} \text{ geben uns} \\ \text{die zwei radioaktiven Kugeln von vier } \{a, b, c, d\}. \end{array} \right. \\ & \\ 1 \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} \text{Eine Kugel finden wir mit zwei Messungen } M_5,\ M_6 \\ \text{aus der Menge } \{a, b, c, d\}, \text{ und die andere} \\ \text{mit siebter Messung aus der Menge } \{14, 15\} \\ \text{(siehe Aufgabe 2.1 c.) und Aufgabe 2.1 a.)).} \end{array} \right. \end{cases}$$

(iii) Eine negative und zwei positiven Proben. Wir testen diese zwei positiven Vierer-Gruppen (ohne $\{1\}$) je mit zwei Messungen (siehe Aufgabe 2.1 c.)).

(iv) Alle drei Proben sind positiv. Dann ist die Kugel 1 radioaktiv. Die zweite r-Kugel finden wir mit drei Messungen aus der Menge $\{2, 3, \ldots, 15\}$ (14 Kugeln, siehe Aufgabe 2.1).

Aufgabe 2.3.

Es wäre günstig, eine radioaktive Kugel (r-Kugel) zu finden und diese als „Muster“ $\{r\}$ zu benutzen. Die ersten vier Messungen können $M_1\{1, 2\}$, $M_2\{3, 4\}$, $M_3\{5, 6\}$ und $M_4\{7, 8\}$ sein. Mögliche Ergebnisse:

(i) Alle vier Proben sind negativ. Dann sind die übrigen beiden Kugeln 9 und 10 radioaktiv und alle vier getesteten Paare enthalten je eine r-Kugel. Eine von $\{9, 10\}$ können wir als Muster benutzen und mit den anderen Kugeln zum Testen kombinieren, um die vier radioaktiven zu finden. Zum Beispiel, $M_5\{1, r\}$, $M_6\{3, r\}$, $M_7\{5, r\}$ und $M_8\{7, r\}$.

(ii) Genau drei Proben sind positiv. Dann haben wir alle sechs radioaktiven Kugeln schon gefunden.

(iii) Genau zwei Proben sind positiv. Dann haben wir vier r-Kugeln schon gefunden, zum Beispiel, 1, 2, 3, 4. Eine davon nehmen wir als Muster $\{r\}$ und machen fünf Messungen $M_5\{5, r\}$, $M_6\{6, r\}, M_7\{7, r\}$, $M_8\{8, r\}$ und $M_9\{9, r\}$ um die beiden weiteren r-Kugeln zu finden.

(iv) Genau eine Probe ist positiv. Dann haben wir zwei r-Kugel gefunden, zum Beispiel 1 und 2, und messen $M_5\{9, 10\}$. Wenn diese Probe negativ ist, enthalten alle vier negativen Paare je eine r-Kugel. Wir finden diese mit vier Messungen mit der Muster-Kugel, wie im ersten Fall. Wenn die Probe $M_5\{9, 10\}$ positiv ist, müssen wir weitere zwei r-Kugeln von 6 mit vier Messungen finden (aus drei negativen Paaren). Wenn wir weitere Messungen machen, führt es uns auf die Aufgabe, eine r-Kugel aus drei mit einer Messung zu finden, was unmöglich ist.

Also brauchen wir mindestens 10 Messungen um 6 radioaktive von 10 Kugeln mit dem gegebenen Messgerät zu finden.

Aufgabe 2.4.

Wir nummerieren die Kugeln so, dass die Kugeln $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in der ersten Kiste sind und die Kugeln $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ in der zweiten.

Wir verwenden für die k-te Messung, wenn sie die Kugeln i und j beinhaltet, die Schreibweise $M_k\{i, j\}$. Wird bei einer Messung Radioaktivität festgestellt, so legen wir dafür den Wert von $M_k\{i, j\}$ als 1 fest, ansonsten den Wert 0. (Eine Messung kann natürlich auch nur eine oder auch mehr als zwei Kugeln umfassen.

Wir fangen mit den Kugeln $\{1, 6, 7\}$ an. Wenn diese Messung negativ ist, bleiben in den Kisten je vier Kugeln $\{2, 3, 4, 5\}$ und $\{8, 9, 10, 11\}$, und wir können die Aufgabe 1 c.) aus dem letzten Aufgabenblatt benutzen und mit 2 Messungen in jeder Kiste eine radioaktive Kugel finden. Andernfalls kann man die Kugeln $\{1, 8, 9\}$ für die nächste Messung verwenden und die Ergebnisse analysieren:

$$M_2\{1, 8, 9\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow & \begin{array}{|l} \text{Mit zwei Messungen finden wir eine radioaktive Kugel} \\ \text{in der Menge } \{2, 3, 4, 5\} \text{und mit der letzten Messung} \\ \text{eine radioaktive Kugel in der Menge } \{6, 7\} \\ \text{(siehe Aufgaben 1 a.) und 1 c.) vom letzten Aufgabenblatt)} \end{array} \\ \\ 1 \Rightarrow & \begin{array}{|l} \text{Kugel 1 ist radioaktiv. Die zweite radioaktive Kugel finden} \\ \text{wir mit drei Messungen in der Menge } \{6, 7, 8, 9, 10, 11\} \\ \text{(siehe Aufgabe 1 d.) vom letzten Aufgabenblatt).} \end{array} \end{cases}$$

Aufgabe 2.5.

Wir teilen alle Kugeln in drei Gruppen mit je 10 Kugeln auf und überlegen, wie sich die fünf radioaktiven Kugeln auf diese drei Gruppen aufteilen: *mindestens eine dieser drei Gruppen enthält entweder keine oder nur eine radioaktive Kugel.*

Wir messen die erste Zehner-Gruppe. Wenn das Messgerät null zeigt, haben wir schon fünf saubere Kugeln gefunden. Wenn das Gerät 1 zeigt, messen wir beliebige fünf Kugeln aus dieser Gruppe. Wenn sie sauber sind, sind sie die gesuchten Kugeln. Andernfalls sind die anderen fünf Kugeln sauber.

Wenn das Messgerät bei der ersten Messung mehr als 1 aber weniger als 5 zeigt, nehmen wir die zweite Zehner-Gruppe und wiederholen unsere Überlegungen.

Wenn wir bei der ersten Messung den Wert 5 erhalten, sind alle Kugeln in den beiden anderen Gruppen sauber.

Aufgabe 2.6.

Die größte Teilmenge die keine zwei Zahlen enthält, deren Differenz 8 ist, ist offensichtlich die Menge $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 19, 20\}$, hat also 12 Elemente.

Daher ist die kleinste Zahl n gleich 13.

Aufgabe 2.7.

Wir benutzen das Schubfachprinzip für vier Sorten (Schubfächer) und 37 Säcke (Gegenstände). Wir erhalten bei Anwendung des Schubfachprinzips, dass es mindestens eine Sorte gibt, von der es $\frac{36}{4}+1 = 10$ Säcke gibt, die nur Kartoffeln einer der vier Sorten enthalten.

Wäre dem Restaurant wichtig, um welche Sorte genau es sich handelt, könnte der Auftrag nicht mit Sicherheit erfüllt werden: es wäre nämlich möglich, dass ein Schubfach weniger als 9 Säcke enthält (z.B. gar keinen Sack) und sich die übrigen Säcke auf die drei anderen Schubfächer verteilen. D.h. dass es Sorten geben kann, von denen weniger als 9 Säcke vorhanden sind. Das Schubfachprinzip stellt nur sicher, dass es mindestens ein Schubfach gibt, in dem sich mehr als 9 Säcke befinden.

Aufgabe 2.8.

Wir stellen fest, dass genau fünf Strecken von jedem Punkt ausgehen. Die beiden Farben entsprechen jeweils einem Schubfach. Laut des Schubfachprinzips, sind mindestens drei der fünf Strecken gleichfarbig. Wenn wir jetzt ihre drei Endpunkte verbinden, egal mit welchen Farben, erhalten wir ein gleichfarbiges Dreieck (entweder eine der Strecken hat die Farbe der zunächst betrachteten gleichfarbigen drei Strecken oder alle drei Strecken sind in der anderen Farbe).

Aufgabe 2.9.

a) Den zehn ganzen Zahlen entsprechen zehn Reste bei Division durch 9. Die neun möglichen Reste bei Division durch 9 (0, 1, …, 8) entsprechen neun Schubfächern. Deshalb befinden sich in mindestens einem der Schubfächer mindesten zwei Zahlen. Diese haben denselben Rest bei Division durch 9, somit ist ihre Differenz durch neun teilbar.

b) Wir bezeichnen diese Zahlen mit $a_1, a_2, \ldots a_n$, und betrachten die n Summen

a_1,
$a_1 + a_2$,
$a_1 + a_2 + a_3$,
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Ist eine davon durch n teilbar, dann die Aufgabe gelöst. Andernfalls können diese n Summen nur $n-1$ verschiedenen Reste bei Division durch n haben (da der Rest 0 nicht auftritt). Laut des Schubfachprinzips, haben mindestens zwei dieser Summen denselben Rest. Die Differenz dieser zwei Summen ist auch eine Summe und ist durch n teilbar.

c) Wir teilen das Einheitsquadrat in 25 Quadrate mit der Seitenlänge $\dfrac{1}{5}$ und betrachten sie als „Schubfächer“ für 51 Punkte. Dann enthält mindestens eines dieser Quadrate zumindest 3 Punkte.

Der Umkreis des Quadrates hat den Radius (Satz des Pythagoras)

$$r = \frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{\frac{1}{50}} < \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}.$$

und enthält mindestens drei der 51 Punkte.

Aufgabe 2.10.

Wir betrachten 2020 Zahlen der Form

$$2019, 20192019, 201920192019, \ldots, \underbrace{201920192019\ldots2019,}_{\text{Ziffern 2,0,1,9 wiederholen sich 2020 mal}} .$$

Offensichtlich sind diese Zahlen durch die gerade Zahl 2020 nicht teilbar (weil sie alle ungeraden Zahlen sind). Dann können sie nur 2019 verschiedenen Reste bei Division durch 2020 haben. Laut des Schubfachprinzips haben also mindestens zwei Zahlen denselben Rest. Die Differenz dieser zwei Zahlen hat die angegebene Form und ist durch 2020 teilbar.

Aufgabe 2.11.

a) Wir betrachten 1001 Primzahlen, die jeweils größer als 1000 sind. Sie können nur 1000 verschiedenen Reste bei Division durch 1000 annehmen. Deshalb haben mindestens zwei dieser Primzahlen denselben Rest und damit haben sie drei übereinstimmenden letzten Ziffern.

b) Wir zeigen, dass dies für jede Anzahl $n + 1$ möglich ist. Betrachten wir $1000n + 1$ Primzahlen und wenden das Schubfachprinzip wie bei obiger Teilaufgabe an, so erhalten wir, dass mindestens $n + 1$ davon denselben Rest bei Division durch 1000 haben und somit in den letzten drei Ziffern übereinstimmen.

Bemerkung. Hier haben wir die bekannte Tatsache verwendet, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wir können also $1000n + 1$ paarweise verschiedene Primzahlen betrachten, egal wie groß wir n wählen.

Aufgabe 2.12.

Jede Zahl aus der n-ten Zeile befindet sich in genau zwei Zahlen in darunter liegenden Zeile (in der Zahl unten links und rechts). Deswegen ist die Summe in der $(n+1)$-sten Zeile gleich zwei mal die Summe in der n-ten Zeile.

Aufgabe 2.13.

In der zweiten Zeile kommen nur ungerade Zahlen vor, also gibt es in der dritten Zeile genau 2 ungerade Zahlen geben, da die Summe von je zwei ungeraden Zahlen gerade ist, und an Rändern haben wir zwei Einser. In der vierten Zeile haben wir dann genau vier ungerade Zahlen, durch die beiden neuen Einser am Rand und die Summe der jeweiligen 1 aus der oberen Zeile und den geraden Zahlen daneben. Man kann so weiter machen und man sieht, dass in der $(n+1)$-sten Zeile genau 2 ungerade Zahlen mehr stehen, als in der vorherigen Zeile. Starten wir in der 2^n-ten Zeile, stehen demnach nach 2^n Schritten (d.h. in der $2^{(n+1)}$-sten Zeile) wieder nur ungerade Zahlen.

Aufgabe 2.14.

Nach der Definition ist $\binom{n}{k+1}$ gleich $\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}$. Dann ist auch $\binom{n-1}{k+1}$ gleich $\binom{n-2}{k+1} + \binom{n-2}{k}$. Diese Gleichungen ergeben insgesamt

$$\binom{n-2}{k+1} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

Wir können so weiter machen (jedes mal haben wir einen Summanden mehr, und er entsteht indem wir den Summanden mit dem unteren Eintrag $k+1$ in zwei neue Summanden teilen, wie im ersten Schritt) solange der obere Eintrag von diesem Summanden mindestens k ist. Am Ende erhalten wir die gewünschte Gleichung

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Hinweis: Die Gleichung hat ihren Namen durch die graphische Darstellung im Pascal'schen Dreieck bekommen. Markiert man alle Einträge der linken Seite der Gleichung, so startet man bei einem der Einser auf der rechten Seite des Dreiecks und markiert dann die weiteren schräg darunter liegenden, bis man $(n–k)$ Einträge markiert hat. Die Summe all dieser Werte ist dann der vom letzten markierten Eintrag aus gesehen rechte untere Nachbar.

Als Beispiel wählen wir $k = 2$ und $n = 4$.
Die linke Seite der Gleichung ist grün markiert, die rechte Seite blau. Insgesamt erinnert die Form aller markierten Einträge an einen Hockey-Schläger.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & \boxed{1} & & & \\
 & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & \boxed{10} & & 5 & & 1
\end{array}$$

Aufgabe 2.15.

Wir wollen genau k verschiedene Dinge auswählen. Betrachten wir ein bestimmtes Element, dann können wir es entweder nehmen oder nicht nehmen. Falls wir es nehmen, müssen wir noch $(k-1)$ Dinge aus den restlichen $(n-1)$ Dingen auswählen (Es gibt $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten, das zu tun). Falls wir es nicht nehmen, müssen wir wieder genau k Dinge aus den restlichen $(n-1)$ Dingen auswählen (Es gibt $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten, das zu tun). Insgesamt ergibt das:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Aufgabe 2.16.

Wir teilen die $2n$-elementige Menge in zwei Mengen auf. Die Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente von diesen $2n$ Elementen auszuwählen, ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten aus der ersten Menge x und aus der zweiten Menge noch $n-x$ Elemente auszuwählen (Die Anzahl der Möglichkeiten das zu tun, für ein fixiertes x ist dann genau $\binom{n}{x} \cdot \binom{n}{n-x} = \binom{n}{x}^2$) Da+$x$ jede Zahl zwischen+1 und+n sein kann, ist

$$\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Aufgabe 2.17.

Aus technischen Gründen setzen Mathematiker fest, dass $0! = 1$ gilt. Dies ist auch für diese Aufgabe nützlich.

Mit dieser Bezeichnung gilt

$$C(n, 0) = C(n, n) = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Wir müssen zeigen, dass

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k),$$

was nach Definition äquivalent ist zu

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k+1)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot k!}.$$

Wir multiplizieren diese Formel mit $\frac{(n-k-1)! \cdot (k-1)!}{(n-1)!}$ und erhalten

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Nenner der linken Seite, erhalten wir die offensichtlich wahre Aussage

$$n = k + (n-k).$$

Aufgabe 2.18.

Da $k < p$ ist, ist auch $p - k < p$, und weil p prim ist, teilt p die Zahl $k!(p-k)$ nicht (Alle Primfaktoren von $k!(p-k)!$ sind kleiner als p). Da p offenbar $p!$ teilt, ist $\binom{(}{p}, k) = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ auch durch p teilbar (Der Zähler ist teilbar durch p und der Nenner nicht).

Aufgabe 2.19.

Falls die Würfel die gleichen Zahlen zeigen, dann teilen Ante und Branko das Geld im Verhältnis $2:1$. Da $2415 : 3 = 805$, bekommt Ante $2 \cdot 805 = 1610$ Euro und Branko 805 Euro. Wenn die Zahlen auf den Würfeln verschieden sind, dann teilen sie das Geld im Verhältnis $2 : 3$. Da $2415 : 5 = 483$ bekommt Ante $2 \cdot 483 = 966$ Euro und Branko $3 \cdot 483 = 1449$ Euro. Beide Ereignisse (dass Ante mehr als 1000 Euro bekommt und dass Branko weniger als 1000 Euro bekommt) treten genau dann ein, wenn die Würfel die gleichen Zahlen zeigen. Daher sind beide Ereignisse gleich wahrscheinlich. Wir können die Ereignisse als Paare von Zahlen aus der Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$, also als $\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$ darstellen. Die gesamte Anzahl an Möglichkeiten ist gleich $6 \cdot 6 = 36$.

Die Anzahl der gesuchten Ereignisse kann man als Menge $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ darstellen. Die Anzahl dieser Ereignisse ist 6. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{6}{36}$.

Aufgabe 2.20.

Es gibt insgesamt 25 Kinder im Klub, daher gibt es $\frac{25\cdot 24}{2} = 300$ Möglichkeiten, 2 Spieler auszuwählen. Und es gibt genau 3 Paare von zwei Schwestern. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{300}$.

Aufgabe 2.21.

Die gesamte Anzahl der möglichen Paare ist

$$\frac{30 \cdot 29}{2} = 435.$$

Wir verteilen die Kugeln in Gruppen modulo 5:

$A(0) = 5, 10, 15, 20, 25, 30$

$A(1) = 1, 6, 11, 16, 21, 26$

$A(2) = 2, 7, 12, 17, 22, 27$

$A(3) = 3, 8, 13, 18, 23, 28$

$A(4) = 4, 9, 14, 19, 24, 29$

a) Wir brauchen für den ersten Teil der Aufgabe genau die Paare, die in derselben Gruppe sind. Die Anzahl der Paare in einer Gruppe ist $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$. Daher ist die gesamte Anzahl solcher Paare gleich $15 \cdot 5 = 75$ (weil wir 5 Gruppen haben). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{75}{435} = \frac{5}{29}.$$

b) Für den zweiten Teil der Aufgabe betrachten wir die folgenden 3 Fälle:

1. Paare mit zwei Kugeln, die beide in $A(0)$ sind
2. Paare in denen, eine Kugel in $A(1)$ und andere in $A(4)$ ist
3. Paare in denen, eine Kugel in $A(2)$ und andere in $A(3)$ ist

Im ersten Fall haben wir genau $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ solcher Paaren, weil $A(0)$ 6 Elemente hat.

Im zweiten Fall gibt es 6 Möglichkeiten, um eine Kugel aus $A(1)$ und 6 Möglichkeiten, um eine Kugel aus $A(4)$ auszuwählen. Daher gibt es insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten in diesem Fall. Der dritte Fall ist analog zum zweiten. Es gibt 36 Möglichkeiten.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{15+36+36}{435} = \frac{1}{5}.$$

Aufgabe 2.22.

Es gibt 101 Möglichkeiten den ersten Punkt auszuwählen und 20 den zweiten Punkt auszuwählen. Insgesamt ergibt das $101 \cdot 20 = 2020$ Möglichkeiten zwei Punkte auszuwählen (zwei Punkte definieren eine Gerade).

Aufgabe 2.23.

Jeder Eckpunkt liegt auf genau $n-3$ Diagonalen, denn eine Diagonale, die diesen Punkt enthält, enthält einen weiteren Punkt des n-Ecks (außer sich selbst oder einen der beiden benachbarten Eckpunkte). Jede diese Diagonale zählen wir 2 Mal. Insgesamt ergibt das $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ Diagonalen.

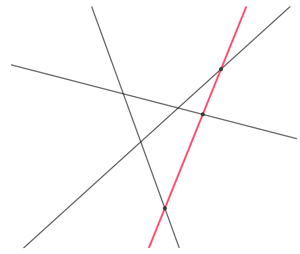
Aufgabe 2.24.

Jedes Geradenpaar hat genau einen Schnittpunkt. Insgesamt gibt es $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Paare von Geraden (n über 2).

Aufgabe 2.25.

Die maximale Anzahl an Bereichen wird genau dann erreicht, wenn einander alle Geraden paarweise schneiden und keine drei Geraden einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Sei b_n diese maximale Anzahl bei n Geraden.

Gezeichnet sind drei schwarze Geraden, die die Ebene in 7 Bereiche zerlegen, was offensichtlich optimal ist. Es gilt demnach $b_3 = 7$. Diese Bereiche sind entweder Dreiecke oder von Geraden begrenzte Bereiche mit endlichem oder unendlichem Inhalt. Wir ergänzen eine vierte Gerade g_{neu}. Sie schneidet die drei schon vorhandenen Geraden in 3 Punkten. Dadurch wird g_{neu} in 4 Abschnitte zerlegt. Jeder dieser Abschnitte eröffnet einen weiteren Bereich durch Zerteilung eines schon bestehenden.



Wir erhalten somit allgemein $b_n + (n+1)$ Bereiche bei $n+1$ Geraden, wie durch die nebenstehenden Tabelle noch einmal verdeutlicht wird.

n	B_n
0	1
1	2
2	4
3	4+3
4	7+4
5	11+5
$\vdots$	$\vdots$
n	b_n
$n+1$	b_n + n+1

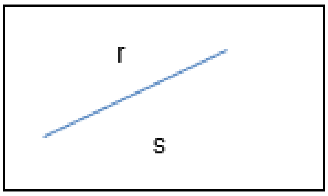
Die gesuchte Anzahl b_n ist demnach $\frac{n^2+n+2}{2}$.

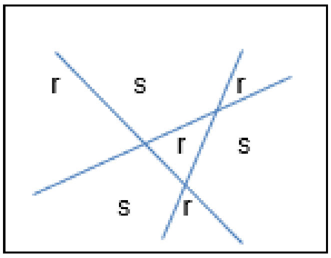
(Da die Differenzenfolge ($b_{n+1} - b_n = n + 1$) durch einen linearen Ausdruck festgelegt ist, lässt sich b_n durch einen quadratischen Ausdruck darstellen.)

Aufgabe 2.26.

Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion. Für kleine Werte von$n$, also $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ ist eine Färbung in die beiden Farben r und s möglich.

Induktionsbasis: Die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 3$ sind in folgender Figur dargestellt:

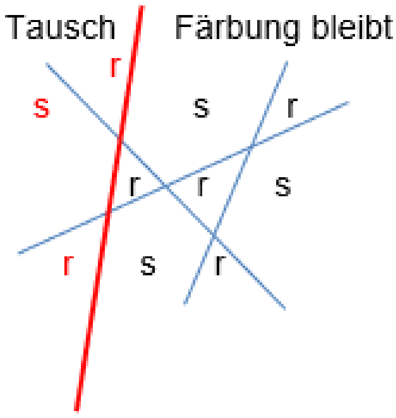




Induktionsvoraussetzung: Bei n Geraden lassen sich alle Gebiete mit zwei Farben r und s so färben, dass benachbarte Gebiete immer verschieden gefärbt sind.

Induktionsbehauptung: Eine derartige Färbung ist auch für $n+1$ Geraden möglich.

Induktionsschluss: Wir setzen voraus, dass es eine solche Färbung für n Geraden gibt und fügen eine neue Gerade hinzu (hier in rot eingezeichnet).
Wir lassen nun auf der einen Halbebene der Gerade die Färbung, wie sie ist und auf der anderen Halbebene ersetzen wir die Farbe jedes Gebietes durch die andere Farbe.

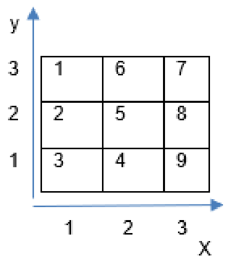


Mit dieser Methode gibt es auch eine passende Färbung für $n+1$ Geraden und wir haben den Beweis abgeschlossen.

Aufgabe 2.27.

Die Käfer haben die Nummern 1, ..., 9 und sind irgendwie laut Angabe am Schachbrett verteilt.

Ein Beispiel ist in nebenstehender Figur abgebildet. Hier sitzt der Käfer 8 zum Beispiel auf dem Feld (3, 2). Wir ordnen jedem Käfer die Summe der beiden aktuellen Koordinaten zu, dem Käfer 8 in diesem Fall die zahl $3 + 2 = 5$, er sitzt also auf einem ungeraden Feld.



Es gibt 5 gerade und 4 ungerade Felder, wie in nebenstehender Abbildung zu sehen. Da jedes Feld von genau einem Käfer besetzt ist, haben 5 Käfer die Parität g und 4 Käfer die Parität u.

g	u	g
u	g	u
g	u	g

Die entscheidende Erkenntnis ist, dass sich *bei einem Wechsel die Parität des Käfers ändert*. Also haben nach dem Erklingen der Pausenglocke 5 Käfer die Parität u und 4 Käfer die Parität g.

Dies ist aber mit einer 1 zu 1 Verteilung von Käfer auf Felder nicht machbar, weswegen es ein mindestens doppelt besetztes und somit auch mindestens ein leeres Feld gibt.

Zusammenfassend erhält man den Widerspruch dadurch, dass

VORHER die Gesamtparität G aller Käfer $5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \equiv 0 \pmod 2$

und

NACHHER die Gesamtparität $G = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \equiv 1 \pmod 2$

beträgt.

Aufgabe 2.28.

Ingesamt muss die Figur 16 Schritte machen, davon 8 nach unten und 8 nach rechts. Wir wählen die (8) Positionen bei denen wir nach unten gehen und bei den übrigen (8) Positionen gehen wir nach rechts. Für diese Wahl gibt es 16 über 8 Möglichkeiten, also $\frac{16!}{8! \cdot 8!} = 12870$ (Die Anzahl der Möglichkeiten, 8 aus 16 Positionen auszuwählen).

Aufgabe 2.29.

Wir teilen die Pfade in zwei 5×5-Schachbretter auf. Jetzt sollen wir Aufgabe 2.28 zwei Mal anwenden (für Schachbretter der Größe 5×5). Denn wir schreiten von links oben zum Feld in der Mitte des Schachbretts und von dort zur rechten unteren Ecke. (Die Mitte ist dabei die Position rechts unten im ersten 5×5-Schachbrett und die erste Position, links oben, im zweiten 5×5-Schachbrett). Insgesamt ergibt das also $\left(\frac{8!}{4! \cdot 4!}\right)^2 = 4900$ Möglichkeiten, der Anteil ist $\frac{4900}{12870} = \frac{490}{1287}$. (Dabei ist die Zahl im Nenner die Anzahl aller möglichen Pfade, die wir in Aufgabe 2.28 bestimmt haben).

Aufgabe 2.30.

Sei $F(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten ein n-Eck zu belegen. Wir unterscheiden 2 Fälle.

Der erste Fall: Der Dominostein ganz links liegt vertikal. In diesem Fall ist die Anzahl der Möglichkeiten das n-Eck zu belegen gleich der Anzahl der Möglichkeiten ein $2\times(n-1)$-Rechteck (das ursprüngliche n-Eck minus das linke 2×1-Rechteck) zu belegen.

Der zweite Fall: Der Dominostein links oben liegt horizontal. Dann müssen wir noch einen Dominostein genau darunter legen. Wenn wir jetzt die 2 Dominos entfernen, bleibt noch ein $2\times(n-2)$-Rechteck übrig. In diesem Fall ist die Anzahl der Möglichkeiten, das $2\times n$-Rechteck zu belegen, gleich der Anzahl der Möglichkeiten ein $2\times(n-2)$-Rechteck zu belegen.

Deswegen ist die Anzahl aller Belegungen eines $2\times n$-Rechtecks mit Dominosteinen gleich

$$F(n-1)+F(n-2),$$

wobei $F(1)=1$ und $F(2)=2$. Die Glieder dieser Folge heißen Fibonacci Zahlen.

Aufgabe 2.31.

Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass der Winkel $\angle A_3A_2A_4 = \angle A_3A_1A_4 = 9°$. Da das Dreieck $A_2A_3A_4$ gleichschenklig ist, ist $\angle A_2A_3A_4 = 180° - 2\cdot 9° = 162°$. Daraus folgt, dass der Außenwinkel dieses n-Ecks gleich $180° - 162° = 18°$ ist und daher ist $18° = \frac{360°}{n}$. Somit gilt $n = 20$ und die Anzahl der Diagonalen ist nach Aufgabe 2.23 gleich $\frac{n\cdot(n-3)}{2} = 170$

Aufgabe 3.1.

Das Dreieck DEC ist ein gleichseitiges Dreieck. Deswegen gilt:

$$|\angle EDC| = |\angle CED| = |\angle DCE| = 60°$$

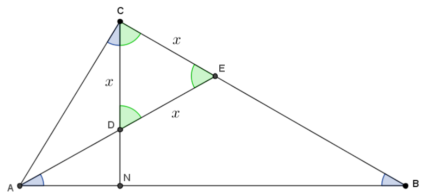
Da $|\angle EDC| = |\angle ADN| = 60°$, ist $|\angle NAD| = 30°$ (da $\angle DNA = 90°$).

Die Gerade AD ist die Winkelsymmetrale von $\angle NAC$ und $|\angle NAD| = |\angle DAC| = 30°$ und dadurch ist $\angle NAC = 60°$.

Aus $|\angle CNA| = 90°$ und $|\angle NAC| = 60°$ folgt $|\angle ACN| = 30°$.

Weil $|\angle ACN| = 30°$ und $|\angle DCE| = 60°$ ist $|\angle ACB| = 90°$.

Im Dreieck ABC gilt folglich $|\angle CBA| = 30°$.
Die Fläche des Dreiecks DEC ist $4\sqrt{3}$. Sei die Seitenlänge im gleichseitigen Dreieck DEC gleich x, dann gilt $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. Daraus folgt $x = 4$.



Da $|\angle DCA| = |\angle DAC| = 30°$ ist ΔDCA ein gleichschenkeliges Dreieck. Im Dreieck CFD gilt, dass

$$|CF| = \frac{x}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Weiters gilt $|AC| = 2|CF| = 4\sqrt{3}$.

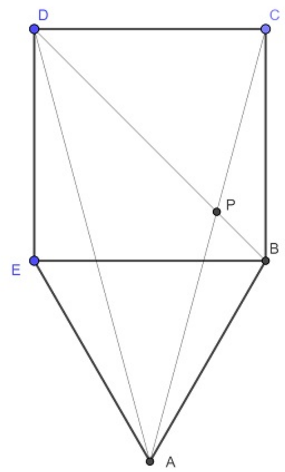
Wir sehen leicht, dass $\triangle ABE$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist, woraus folgt $|BE| = |AE| = 2x = 8$.

Deshalb ist $|BC| = |BE| + |EC| = 12$. Die Längen der Katheten des Dreiecks ABC sind 12 und $4\sqrt{3}$, dadurch ist seine Fläche gleich $\frac{12\cdot 4\sqrt{3}}{2}$.

(Bemerkung: $\triangle ABC$ ist ein „halbes" gleichseitiges Dreieck. Durch Spiegelung der Kathete, die am Winkel mit 30° anliegt, erhält man ein gleichseitiges Dreieck. Diese Spiegelung kann auf dem Weg zur Lösung einer Aufgabe sehr hilfreich sein!)

Aufgabe 3.2.

Wegen $BC = CD = DE$ und $B \perp CD$, $CD \perp DE$ ist $BCDE$ ein Quadrat, also stimmt auch die Länge der Strecke BE mit der Seitenlänge des Fünfecks $ABCDE$ überein, und es gilt $BC \perp BE$, $BE \perp DE$. Weiters ist das Dreieck ABE wegen $AB = AE = BE$ ein gleichseitiges Dreieck.



Daraus folgt

$$\angle CBA = \angle CBE + \angle EBA = 90° + 60° = 150°$$

$$\angle AED = \angle AEB + \angle BED = 60° + 90° = 150°.$$

Wegen $AB = BC = DE = EA$ sind ABC und AED somit kongruente gleichschenkelige Dreiecke, und wir erhalten

$$\angle BAC = \angle ACB = \angle DAE = \angle EDA = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Weil jede Quadratdiagonale die rechten Winkel in ihren Endpunkten halbiert, ergibt sich damit

$$\angle ADP = \angle EDB - \angle EDA = 45° - 15° = 30°.$$

Weiters gilt

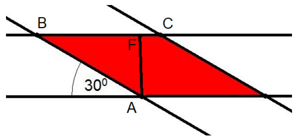
$$\angle PAD = \angle BAE - \angle BAC - \angle DAE = 60° - 2 \cdot 15° = 30°$$

Daher ist ADP ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basis AD, und es folgt $PA = PD$.

Aufgabe 3.3.

Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei F.

Dann gilt $\angle BAF = 60°$, das Dreieck ABF also ein „halbes gleichseitiges Dreieck“ und daraus folgt $AB = 2 \cdot a$.



Der Flächeninhalt der gesuchten Figur ist daher gleich dem eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und $2 \cdot a$, also gleich $2 \cdot a^2$.

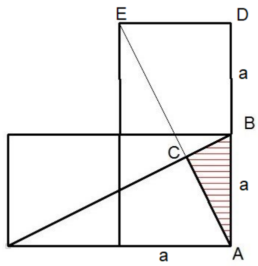
Aufgabe 3.4.

Die Dreiecke ACB und ADE sind ähnlich.

Es gilt $AE = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5} \cdot a$.
Daher gilt für die Flächeninhalte A_1 und A_2 dieser Dreiecke

$$A_1 : A_2 = a^2 : 5a^2$$

.



Mit $A_2 = a^2$ folgt

$$A_1 = \frac{a^2}{5}.$$

Aufgabe 3.5.

(i) Das Dreieck EAC ist flächengleich dem Dreieck EAB. Nimmt man jeweils EAS weg, so bleiben die beiden flächengleichen Dreiecke $ESC = A_1$ und $ABS = A_5$ übrig. Somit gilt $|A_1| = |A_5|$.

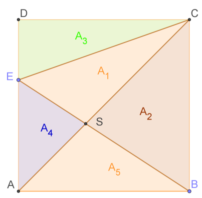
(ii) Sei $\mathbf{A}$ der Inhalt des Quadrats. Es gilt:

$$|A_3| + |A_4| = \frac{\mathbf{A}}{2} - |A_1|$$
$$|A_5| + |A_2| = \frac{\mathbf{A}}{2}$$
$$|A_2| + |A_1| = \frac{\mathbf{A}}{2}$$

Somit ergibt sich die gewünschte Aussage.

Der **Teppichüberdeckungssatz** lautet:
Lässt sich ein Rechteck mit zwei Teppichen so überdecken, dass genau die gesamte Fläche bedeckt wird, so gilt: Wenn die Teppiche verschoben werden und beide weiterhin nur Teile des Rechtecksbereichs abdecken, so ist der Überlappungsbereich genauso groß wie der durch die Verschiebung frei werdende Bereich.

Teppich 1: BCE
Teppich 2: ABC
Überlappungsbereich A_2
Frei gewordene Fläche: $|A_3|+|A_4|$



Aufgabe 3.6.

Wir berechnen den Anteil auf zwei Arten.

1. Art: Verwendung von Koordinaten.
Die Koordinaten der Punkte legen wir wie folgt fest: $A(0 \mid 0)$; $B(a \mid 0)$; $C(a \mid a); D(0 \mid a)$ und $M(x \mid y)$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$ und $0 < x, y < a$.

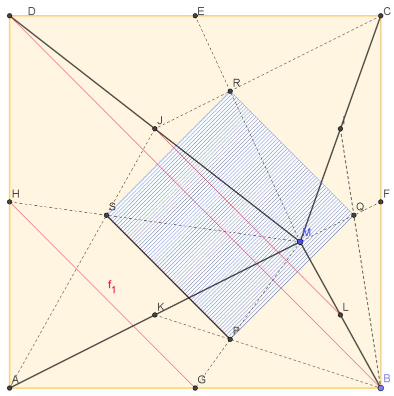
Die Punkte P, Q, R und S lassen sich nun mittels Schwerpunktformel wie folgt bestimmen:

$$P = \frac{1}{3}(A + B + M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a + x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{3}(B + C + M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a + x \\ a + y \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{1}{3}(C + D + M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a + x \\ 2a + y \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{3}(D + A + M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ a + y \end{pmatrix}$$



Es gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{QR} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}.$$

Also sind die beiden Vektoren orthogonal (das Skalarprodukt ist 0) und offenbar gleich lang, $PQRS$ ist also ein Quadrat. PQ ist parallel zur Diagonale AC und QR ist parallel zu BD. $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ und der Inhalt de Quadrats $PQRS$ ist somit $\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}a^2$ und der gesuchte Faktor ist $\frac{2}{9}$.

2. Art: Verhältnisse.

Sei H_a der Halbierungspunkt von MB. Q teilt die Strecke H_aC im Verhältnis $1:2$ und P teilt die Strecke H_aA im Verhältnis $1:2$. Somit ist $x = PQ$ ein Drittel von AC.

$x = \frac{1}{3}a \cdot \sqrt{2}$ und der Inhalt des Quadrats beträgt $a^2 \cdot \frac{2}{9}$.

Aufgabe 3.7.

Wir zeigen, dass die Dreiecke AEN und CFM ähnlich sind.

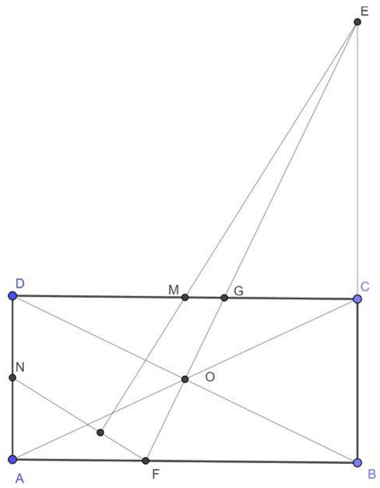
Die beiden Dreiecke haben einen rechten Winkel gemeinsam. Es genügt daher

$$AE : AN = FC : MC \iff MC : AN = FC : AE$$
$$\iff AB : BC = FC : AE$$

zu zeigen.
Bezeichnet man den Schnittpunkt von EF mit CD mit G, dann gilt aus Symmetriegründen $AE = CG$. Die beiden rechtwinkeligen Dreiecke CFG und CDB sind ähnlich, da $\angle BFO = \angle CDB$ gleich große Normalwinkel sind. Daher gilt

$$FC : GC = DC : BC \quad \text{also} \quad FC : AE = AB : BC$$

und daher sind die beiden Dreiecke ähnlich.

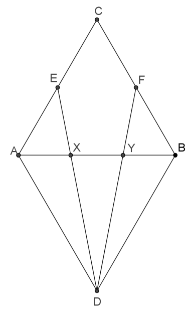


Daher sind $\angle ANE$ und $\angle CMF$ gleich groß und da $AN \perp CM$, folgt $EN \perp FM$ (gleich große Normalwinkel).

Aufgabe 3.8.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von DE und AB mit X.

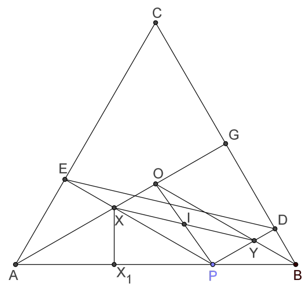
Dann sind die Dreiecke AXE und BXD ähnlich, da sie zwei Seiten teilen und die jeweils dritten Seiten parallel zueinander sind. Nach der Angabe gilt $|AE| : |BD| = 1 : 2$, also folgt $|AX| : |XB| = 1 : 2$, äquivalent $|AX| = \frac{1}{3}|AB|$.



Analog folgt auch $|YB| = \frac{1}{3}|AB|$ für den Schnittpunkt Y von DF und AB, und damit zuletzt $|XY| = \frac{1}{3}|AB|$.

Aufgabe 3.9.

Die Schnittpunkte von AO und BO mit PE und PD seien X und Y. Das Viereck $PYOX$ ist ein Parallelogramm, da gegenüberliegende Seiten parallel sind. Daher halbiert PO die Strecke XY.
Sei nun X_1 der Lotfußpunkt des Lotes von X auf AB.
Die drei Dreiecke PX_1X, AX_1Xund AEX sind kongruent. Weiters gilt $EX = \frac{1}{2}AX = \frac{1}{2}PX$.



Also gilt

$$PX : XE = 2 : 1.$$

Analog zeigt man

$$PY : YD = 2 : 1.$$

Daher ist ED parallel zu XY und mit dem Strahlensatz folgt die Behauptung.

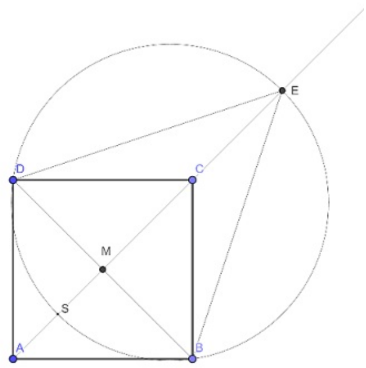
Aufgabe 3.10.

Das Dreieck SBE ist rechtwinkelig mit dem rechten Winkel im Eckpunk B.

Die Strecke MB ist die Höhe auf die Hypotenuse SE dieses Dreiecks. Daher gilt mit dem Höhensatz

$$SM \cdot ME = MB^2$$

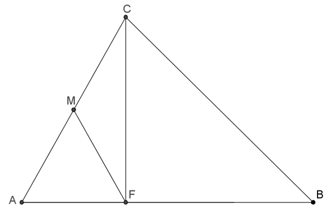
und mit $ME = 2 \cdot MB$ folgt $SM = \frac{MB}{2} = \frac{AM}{2}$.



Aufgabe 3.11.

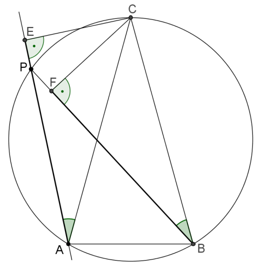
Wir haben den Beweis in zwei Richtungen zu führen.

- Es sei $AM = AF$.
  Da das Dreieck ACF rechtwinkelig ist, gilt nach dem Satz von Thales $AM = AF$. Daher ist das Dreieck AMF gleichseitig und somit $\angle BAC = 60°$.
- Es sei $\angle BAC = 60°$.
  Da das Dreieck ACF rechtwinkelig ist, gilt wie oben $AM = AF$. Daher ist das Dreieck AMF gleichschenkelig und die Basiswinkel $60° = \angle BAC = \angle FAM$ sind gleich groß. Daher ist auch der dritte Winkel im Dreieck AMF gleich $60°$ und somit das Dreieck AMF gleichseitig. Also gilt $AM = AF$.



Aufgabe 3.12.

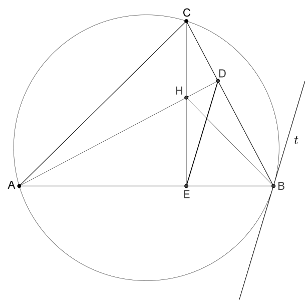
Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle CAP = \angle CBP$.



Damit haben die Dreiecke ACE und BCF jeweils einen rechten Winkel und den Winkel $\angle CAE = \angle CBF$ gemeinsam, und da sie auch in der Hypotenusenlänge $|CA| = |CB|$ übereinstimmen, sind sie kongruent.

Es folgt $|AE| = |BF|$.

Aufgabe 3.13.

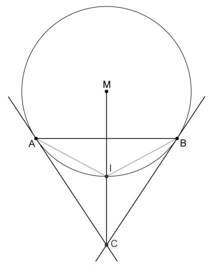


Der Winkel von t zur Seite AB ist $\gamma = \angle ACB$ (Peripheriewinkelsatz: Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel).
Es sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Das Viereck $EBDH$ ist ein Sehnenviereck. Daher gilt

$$\angle BED = \angle BHD = \gamma.$$

Damit schließen aber DE und t denselben Winkel mit der Seite AB ein, d.h. sie sind parallel.

Aufgabe 3.14.



Sei M der Mittelpunkt des Kreises k. Der Schnittpunkt von CM mit k sei I. Da das Dreieck ACB gleichschenkelig ist, genügt es zu zeigen, dass AI den Winkel $\angle BAC$ halbiert. Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

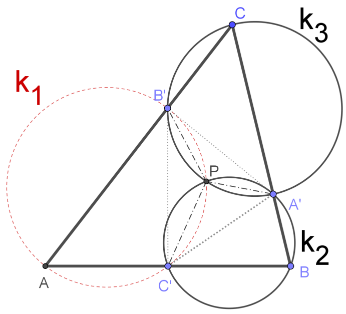
$$\angle CAI = \angle ABI$$

und aus Symmetriegründen gilt

$$\angle ABI = \angle IAB.$$

Daher halbiert AI den Winkel $\angle BAC$.

Aufgabe 3.15.



Sei P jener Schnittpunkt von k_2 und k_3, der nicht auf BC liegt. Wir wollen zeigen, dass P, so wie auch in der Abbildung rechts dargestellt, in jedem Fall auch auf k_1 liegen muss.
Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks ABC in A, B, und C mit α, β und γ.
Nach dem Peripheriewinkelsatz (in k_2 über Sehne $C'A'$) gilt $\angle C'PA' = 180° - \beta$.
Ebenso gilt nach Peripheriewinkelsatz (in k_3 über Sehne $A'B'$), dass $\angle A'PB' = 180° - \gamma$.

Somit gilt

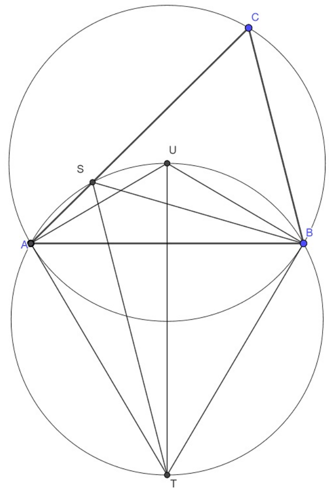
$$\angle C'PB' = 360° - (180° - \beta + 180° - \gamma) = \beta + \gamma.$$

Da $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, liegt somit P nach Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf dem Bogen $B'C'$ von k_1, der A nicht enthält.

Also schneiden einander die drei Kreise in P.

Aufgabe 3.16.

a) Da AT und BT normal auf AU bzw. BU stehen, liegen die Punkte A, B, T und U aufgrund des Satzes von Thales auf einem Kreis k_1 über dem Durchmesser TU.



Weiters gilt mit dem Peripheriewinkelsatz $\angle AUB = 2\gamma$. Da das Dreieck BSC gleichschenkelig ist, gilt $\angle BCS = \angle CBS = \gamma$. Da der Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist, folgt $\angle ASB = 2\gamma$. Daher gilt $\angle ASB = \angle AUB = 2\gamma$, und mit dem Peripheriewinkelsatz folgt, dass die Punkte A, B, S und U auf einem Kreis k_2 liegen. Da die beiden Kreise k_1 und k_2 die Punkte A, B, U gemeinsam haben gilt $k_1 = k_2$ und die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.

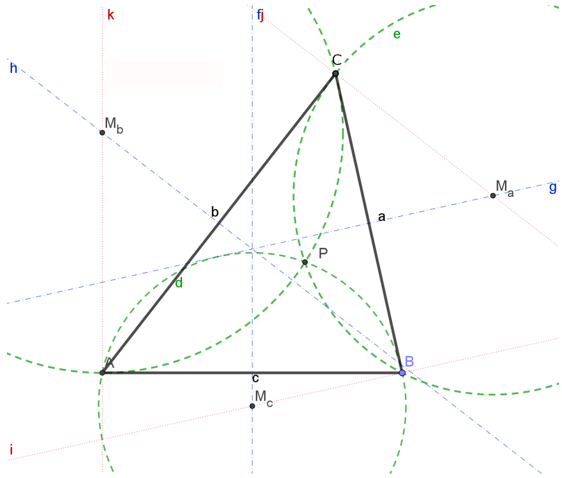
b) Mit dem Südpolsatz folgt, dass ST die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ASB$ ist. Daher gilt $\angle AST = \gamma$ und somit ist ST parallel zu BC.

Aufgabe 3.17.

Sei $P := k_2 \cup k_3$. Wir wollen zeigen, dass P auch auf k_1 liegt.

Nach dem Sehnen-Tangentensatz in k_2 gilt mit $\angle(b, BC) = \gamma$ und Tangente b, dass $\angle CPB = 180° - \gamma$ ist.

Nach dem Sehnen-Tangentensatz in k_3 gilt mit $\angle(c, AC) = \alpha$ und Tangente c, dass $\angle APC = 180° - \alpha$ ist.



Damit gilt, dass

$$\angle APB = 360° - (180° - \gamma + 180° - \alpha) = \gamma + \alpha = 180° - \beta$$

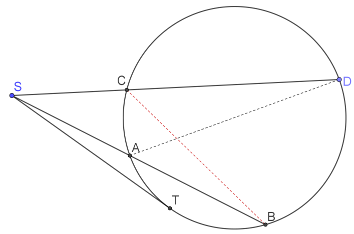
und nach Umkehrung des Sehnen-Tangentensatzes folgt, dass P auf k_1 liegt.

Aufgabe 3.18.

Wir verwenden den *Sehnen-Tangentensatz*:

Satz *(Sehnen-Tangentensatz).* Sei S der Schnittpunkt zweier (nicht paralleler) Sehnen AB und CD eines Kreises k, die einander außerhalb von k schneiden. Sei T einer der Tangentenschnittpunkte der Tangenten von S an k. Dann gilt:

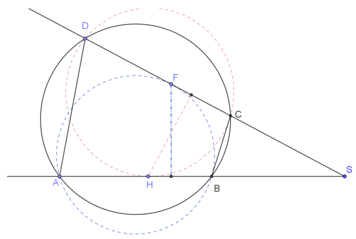
$$SA \cdot SB = SC \cdot SD = ST^2$$



Beweisidee. Die Dreiecke SAD und SBC sind zueinander ähnlich, Durch Ansetzen der entsprechenden Proportionen ergibt sich die Behauptung. □

Im Bild rechts ist die Situation dargestellt. Mit dem Sehen-Tangentensatz gelten die folgenden Gleichungen:

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD \qquad \text{in Kreis } k$$
$$SA \cdot SB = SF^2 \qquad \text{in Kreis } k_1$$
$$SC \cdot SD = SH^2 \qquad \text{in Kreis } k_2$$



Also gilt: $SF = SH$ und folglich ist das Dreieck SHF gleichschenkelig und die beiden Höhen sind gleich

$$d(F;\, AB) = d(H;\, CD)$$

Aufgabe 3.19.

Wir verwenden die Tatsache, dass die Länge der Tangentenabschnitte (Entfernung eines Punktes P, der außerhalb eines Kreises k liegt, vom Berührpunkt der Tangente) für beide Tangenten von P an k gleich groß sind.

a) Bei entsprechender Beschriftung (wie in der Abbildung unten links dargestellt mit Berührpunkten P, Q, R und S) ist die Gleichung $AB + CD = BC + DA$ sofort abzulesen.

Umkehrung. Sei $ABCD$ ein allgemeines Viereck und $AECD$ mit E auf der Strecke AB ein Tangentenviereck, wie in der mittleren Abbildung dargestellt. Im Dreieck BCE gilt: $BC < CE + EB$.

Da $AECD$ ein Tangentenviereck ist, gilt (wie wir soeben gezeigt haben):

$$AE + CD = CE + AD \quad | +\mathbf{EB}$$
$$AE+\mathbf{EB} + CD = CE + +\mathbf{EB} + AD > BC + AD$$
$$AB + CD > BC + AD$$

Also gilt die entsprechend Gleichung nicht.

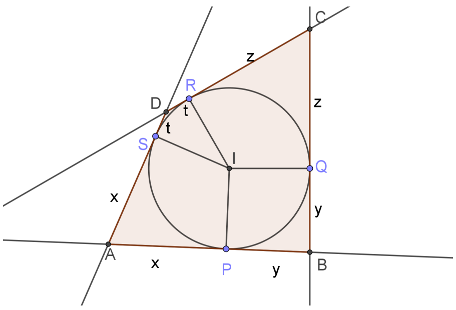
b) Wir verwenden die Bezeichnungen wie in der Abbildung rechts dargestellt. Die behauptete Gleichung lässt sich wie folgt umformen:

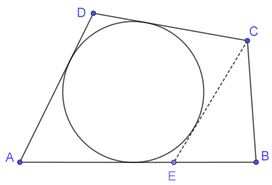
$$EA + AF = EC + CF$$
$$(EP - x) + (FS + x) = (ER + z) + (FQ - z)$$
$$EP + FS = ER + FQ$$

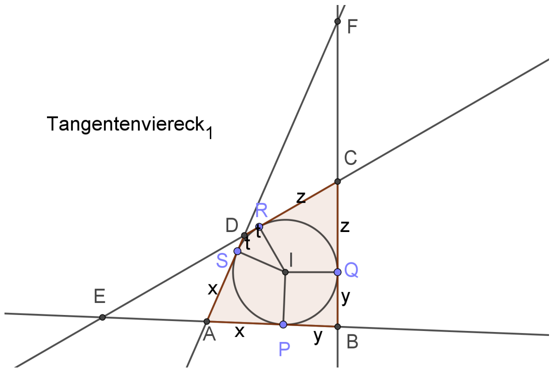
Wir wissen, dass aufgrund der Eigenschaft der Tangentenabschhnitte, $EP = ER$ und $FS = FQ$ gilt und damit die letzte Gleichung erfüllt ist. Somit ist auch die Gleichheit $EA+AF = EC+CF$ bewiesen.

c) Analog wie bei **b)** formen wir die Gleichung zu einer wahren Aussage um:

$$EB - BF = ED - DF$$
$$(EP + y) - (FQ + y) = (ER - t) - (FS - t)$$
$$EP - FQ = ER - FS$$







Aufgabe 4.1.

Primzahlen haben nur 1 als Teiler kleiner als sie selbst, sind also deshalb defizient.

Aufgabe 4.2.

Da 12 eine abundante Zahl ist, betrachten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $12n$. Diese hat unter anderem die Teiler $n, 2n, 3n, 4n$ und $6n$, deren Summe $16n$ ist. Dadurch ist $12n$ für jedes n abundant.

Aufgabe 4.3.

Eine natürliche Zahl lässt bei der Division durch 9 denselben Rest wie ihre Ziffernsumme. Da die Ziffernsummen der beiden Zahlen gleich sind, lassen auch die beiden Zahlen bei der Division durch 9 denselben Rest. Daraus folgt sofort, dass ihre Differenz durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 4.4.

Es sei

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a + (k-1)) = ka + \frac{k \cdot (k-1)}{2}$$

mit einer ganzen Zahl $k \geq 2$ eine solche Summe. Dann gilt

$$k \cdot (2a + k - 1) = 2 \cdot 345 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23.$$

Wegen $k \leq 2a + k - 1$ kommen für k nur die Wert 2, 3, 5, 6, $10, 15$ und 23 in Frage.

Es gibt daher 7 solche Summen.

Aufgabe 4.5.

Seien zum Beispiel $a = 57$ und $b = 38$ gegeben. Dann gilt

$$a \cdot b = 57 \cdot 38 = (5 \cdot 10 + 7) \cdot (3 \cdot 10 + 8) = 5 \cdot 3 \cdot 100 + (5 \cdot 8 + 3 \cdot 7) \cdot 10 + 7 \cdot 8$$

Mehrmalige Anwendung von Zi auf $a \cdot b$ liefert

$$Zi(57 \cdot 38) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 8 = 132 \Rightarrow Zi(Zi(57 \cdot 38)) = Zi(132) = 6.$$

Andererseits gilt auch

$$Zi(57) \cdot Zi(38) = (5 + 7) \cdot (3 + 8) = 12 \cdot 11 = 132 \Rightarrow Zi(132) = 6$$

Sei nun Z die genügend oftmalige Anwendung der Ziffernsummenbildung Zi. Wir vermuten, dass

$$Z(a \cdot b) = Z(a) \cdot Z(b)$$

gilt.

Sind a und b zweistellig, so ist

$$a \cdot b = (10a_1 + a_0) \cdot (10b_1 + b_0) = (a_1b_1 \cdot 100 + (a_1b_0 + a_0b_1) \cdot 10 + a_0b_0)$$

und die Anwendung von Zi ergibt $a_1b_1 + a_1b_0 + a_0b_1 + a_0b_0$.

Das Produkt der direkten Anwendung von Zi auf die einzelnen Faktoren a und b führt auf dasselbe Ergebnis.

Zurück zum Beispiel: $a = 2019^{2020}$ ist gegeben.

$n = 1$: $Zi(2019) = 12 \Rightarrow Zi(Zi(2019)) = Zi(12) = 3$
$n = 2$: $Zi(2019^2) = Zi(4076361) = 27 \to Zi(27) = 9$
bzw. $Zi(2019) \cdot Zi(2019) = 12 \cdot 12$ und $Zi(Zi(12)) \cdot Zi(Zi(12)) = 3 \cdot 3 = 9$
$n = 3$: $Zi(2019^3) = Zi(8230172859) = 45 \to Zi(45) = 9$
bzw. $Zi(2019^3) = Zi(2019^2) \cdot Zi(2019) = 9 \cdot 12 = 108 \to Zi(108) = 9$.

Mittels Induktionsbeweis erhalten wir $Z(2019^n) = 9$ für $n \geq 2$, also auch $Z(2019^{2020}) = 9$.

Alternativer Beweis: Die Zahl $2019 = 3 \cdot 667$ ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar (der Rest von 2019 bei Division durch 9 ist 3.). Für jede Potenz $n \geq 2$ ist 2019^n ein Vielfaches von 9. Durch Anwenden der Ziffernsummenbildung bleibt der Rest bei Division durch 9 erhalten. Dies folgt aus der Teilbarkeitsregel durch 9: eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist. Wendet man also die Funktion Zi auf eine Zahl a so oft an, bis eine einstellige Zahl übrig bleibt, so ist diese Zahl genau der Rest von a bei Division durch 9, oder 9 selbst, falls die Ausgangszahl a ein Vielfaches von 9 ist. Für $a = 2019^{2020}$ ist das Ergebnis demnach 9.

Aufgabe 4.6.

Da das Gesamtgewicht $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ im Fall $n = 2011$ nicht durch 3 teilbar ist, kann es eine solche Aufteilung in Fall (a) nicht geben. Für den Fall (b) bemerken wir zunächst, dass man neun aufeinanderfolgende Zahlen $k+1$, $k+2$, $\ldots$, $k+9$ in drei Mengen mit gleicher Summe aufteilen kann, nämlich in $A = \{k+1\,, k+5,\ k+9\}$, $B = \{k+2,\ k+6,\ k+7\}$ und $C = \{k+3,\ k+4,\ k+8\}$, jede mit Summe $3k + 15$. Weil $2012 - 5$ durch 9 teilbar ist, kann die Menge $\{6, 7, 8, \ldots, 2012\}$ in disjunkte Mengen von je neun aufeinanderfolgenden Zahlen aufgeteilt werden. Wir teilen nun jede dieser wie vorhin beschrieben in drei Teile mit gleicher Summe auf und fassen die entsprechenden Teile zu drei großen Mengen zusammen. Die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kann in $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ und $\{5\}$ aufgeteilt werden. Fügen wir den drei großen Mengen von vorher nun diese drei Mengen entsprechend hinzu, haben wir die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 2012\}$ in drei Mengen von gleicher Summe aufgeteilt.

Aufgabe 4.7.

Bezeichnen wir die roten Zahlen mit a, b, c und d, so erhalten wir als Ausdruck für die Summe der grünen Zahlen $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$. Weil $a + c$ und $b + d$ ganze Zahlen ≥ 2 sind, ist $k := a + c$ ein Teiler von 40 zwischen 2 und 20, und $a + c + b + d = k + \frac{40}{k}$. Die in Frage kommenden Teiler von 40 sind 2, 4, 5, 8, 10, 20. Wir erhalten als mögliche Summen die Zahlen $\{22, 14, 13\}$, und jede dieser Zahlen wird tatsächlich angenommen, z.B. wenn (a, b, c, d) die Werte $(1, 1, k-1, \frac{40}{k} - 1)$ annimmt.

Aufgabe 4.8.

Durch Multiplikation der Gleichung mit $x \cdot y \cdot n \neq 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& n \cdot y + n \cdot x = x \cdot y \\
\Leftrightarrow \quad & -n \cdot y - n \cdot x + x \cdot y = 0 \quad | + n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x \cdot y - n \cdot x - n \cdot y + n^2 = n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (x - n) \cdot (y - n) = n^2 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Betrachten wir die Primfaktorzerlegung von n, also $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, wobei p_i paarweise verschiedene Primzahlen sind und $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, k$. Die Anzahl der Lösungen von $(*)$ ist gleich der Anzahl der Zerlegungen von n^2 in zwei ganzzahlige Faktoren, mit Ausnahme der Zerlegung in $n \cdot n$, also

$$2 \cdot (2 \cdot \alpha_1 + 1) \cdot (2 \cdot \alpha_2 + 1) \cdots (2 \cdot \alpha_k + 1) - 1.$$

(Bei Zerlegung von n^2 in die beiden Teiler n und n, wäre die linke Seite der Gleichung 0.) Dieser Ausdruck ist genau dann gleich 5 wenn $k = 1$ und $\alpha_1 = 1$, und daraus folgt, dass $n = p$, wobei p eine Primzahl ist.

Aufgabe 4.9.

Zunächst, wenn n nur einen Primfaktor hat, also $n = p^a$, hat n die Teiler $1, p, p^2, \ldots, p^{a-1}$ die kleiner sind als n selbst. Deren kleinstes gemeinsames Vielfaches ist p^{a-1}, somit ist $n = p^a$ eine Lösung für jede Primzahl p und positive ganze Zahl a.

Sei nun n von der Gestalt $p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$, wobei $p_1, \dots, p_r$ Primzahlen sind und $a_1, \dots, a_r$ positive natürliche Zahlen. Damit sind $p_1^{a_1}, \dots, p_s^{a_s}$ Teiler von n (die kleiner sind als n selbst).

Nun gilt folgendes:

- $\mathrm{kgV}(d_1, \dots, d_r) \mid n$, da $d_1, \dots, d_r \mid n$.
- $\mathrm{kgV}(d_1, \dots, d_r) \geq \mathrm{kgV}(p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}) = n$.

Aus diesen beiden Überlegungen folgt $\mathrm{kgV}(d_1, \dots, d_r) = n$. Also sind nur die schon erwähnten Primzahlpotenzen Lösungen.

Aufgabe 4.10.

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Setze für $x = \frac{p}{q}$ in die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ein. Der Bruch $\frac{p}{q}$ sei vollständig gekürzt. Multiplikation mit q^2 liefert

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Wir zeigen, dass wenn alle 3 Koeffizienten ungerade sind, die linke Seite kongruent $1 \pmod 2$ ist. Bezeichne g eine gerade Zahl und u eine ungerade Zahl.

	p	q	$ap^2 + bpq + cq^2$
1. Fall	g	u	$g + g + u = u$
2. Fall	u	g	$u + g + g = u$
3. Fall	u	u	$u + u + u = u$

Also ist in allen Fällen die linke Seite ungerade. Ein Widerspruch. Also können nicht alle drei Koeffizienten ungerade sein.

Bemerkung. Der Fall p und q gerade ist ausgeschlossen, da $ggT(p, q) = 1$ vorausgesetzt ist.

Aufgabe 4.11.

Sei $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, dann gilt $x^2 = 2 + 3 - 2\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6}$. Deshalb folgt

$$(x^2 - 5)^2 = (-2\sqrt{6})^2 = 4 \cdot 6 = 24,$$

womit $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ eine Nullstelle vom Polynom

$$(x^2 - 5)^2 - 24 = x^4 - 10x^2 + 25 - 24 = x^4 - 10x^2 + 1$$

ist.

Nun zur Frage, ob $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ eine rationale Zahl ist. Falls ja, lässt sie sich schreiben als $\frac{a}{b}$, wobei a und b ganze Zahlen sind, $b \neq 0$, die zueinander teilerfremd sind. Damit gilt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 10\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 = 0.$$

Multiplikation mit b^4 liefert

$$a^4 - 10a^2b^2 - b^4 = 0.$$

Falls $b \notin \{-1, 1\}$, sei p ein Primfaktor von b. Durch die Gleichung folgt nun $p \mid a^4 \Rightarrow p \mid a$, womit a und b nicht teilerfremd sind, ein Widerspruch.

Es bleibt also der Fall $b \in \{-1, 1\}$, wodurch x ganzzahlig wäre. Betrachtet man nun die ursprüngliche Gleichung $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ wo jetzt $x \in \mathbb{Z}$ gilt, erkennt man, dass x ein Teiler von 1 sein muss, da x jeden anderen Term teilt. Überprüft man nun die drei Fälle $x = -1$, $x = 0$ und $x = 1$ merkt man, dass keine von diesen eine Nullstelle ist.

Damit haben wir gezeigt, dass das Polynom $x^4 - 10x^2 + 1$ keine rationale Nullstelle besitzt und damit $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ irrational ist.

Aufgabe 4.12.

Es gilt $n-1 \mid (n-1)(n^2+n+1) = n^3-1$ (geometrische Reihe!). Definieren wir $\operatorname{ggT}(n-1,\, n^3+1) =: g$ erhalten wir

$$g \mid n-1 \Rightarrow g \mid n^3 - 1 \Rightarrow g \mid (n^3+1) - (n^3-1) = 2.$$

Damit ist g tatsächlich entweder 1 oder 2.

Aufgabe 4.13.

Zu jedem Teiler d von n gibt es den Komplementärteiler n/d. (Etwa ist 4 ein Teiler von 20, wobei 5 der Komplementärteiler ist). Deshalb tauchen Teiler immer in Paaren auf, deren Produkt die ursprüngliche Zahl ist. Nun kann man das Produkt der Teiler ebenfalls in Paare zusammenfassen, zum Beispiel gilt für $n = 20$

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 = \underbrace{1 \cdot 20}_{=20} \cdot \underbrace{2 \cdot 10}_{=20} \cdot \underbrace{4 \cdot 5}_{=20} = 20^3 = 20^{\tau(20)/2}.$$

Die Anzahl dieser Paare ist die Anzahl der Teiler $\tau(n)$ dividiert durch 2, da jedes Paar aus 2 Teilern besteht.

Die einzigen Zahlen n, für diese Überlegung nicht stimmt, ist, wenn ein Teiler mit seinem Komplementärteiler übereinstimmt. Dies ist genau bei Quadratzahlen der Fall, da m^2 den Teiler m mit Komplementärteiler m besitzt.

Aufgabe 4.14.

Alle Teiler von $n = 2^{34} \cdot 5^{67}$ die kleiner sind als n, sind von der Form $2^a 5^b$ wobei $0 \leq a \leq 34$, $0 \leq b \leq 67$ und $(a, b) \neq (34, 67)$. Sobald einer der Spieler einen Teiler nennt, der durch 2^{34} oder 5^{67} teilbar ist, sprich einen Teiler mit $a = 34$ oder $b = 67$, gewinnt der darauf folgende Spieler indem er entsprechend die andere Zahl 5^{67} oder 2^{34} sagt.

Deshalb versuchen beide Spieler Teiler mit $0 \leq a \leq 33$ und $0 \leq b \leq 66$ zu nennen und der/die erste, dem/der das nicht gelingt, verliert. Es gibt genau $34 \cdot 67$ solcher Zahlen, und da dies eine gerade Zahl ist, wird der zweite Spieler (Bob) die letzte solche Zahl nennen. Daraufhin sagt Alice eine mit $a = 34$ oder $b = 67$ woraufhin Bob gewinnen kann.

Aufgabe 4.15.

Sei $a = \overline{xyz} = 100x + 10y + z$ und somit $a^2 = 10000x^2 + 100y^2 + z^2 + 2000xy + 200xz + 20yz$. Die gegebene Bedingung lautet

$$a \equiv a^2 \equiv a^3 \equiv \dots \pmod{1000}$$

Wir bemerken zunächst, dass für die Einerstelle z von a nur die Ziffern der Menge $\{1, 5, 6, 0\}$ in Betracht kommen. Wir untersuchen die einzelnen Fälle.

$z = 6$. Aufgrund der geforderten Bedingung muss jedenfalls auch die Gleichung

$$a \equiv a^2 \pmod{100}$$

gelten. Setzt man den Wert von z in a bzw. a^2 ein, so ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&10y + 6 \equiv 36 + 20 \cdot y \cdot 6 \pmod{100}\\
\Leftrightarrow &10y + 6 \equiv 36 + 20y \pmod{100}\\
\Leftrightarrow &0 \equiv 30 + 10y \pmod{100} \quad |: 10 \text{ Achtung: Modul auch dividieren}\\
\Leftrightarrow &0 \equiv 3 + y \pmod{10} \quad \Rightarrow y = 7.
\end{aligned}$$

Jetzt wird die Gleichung modulo 1000 betrachtet:

$$
\begin{aligned}
&a \equiv a^2 \pmod{1000}\\
&100x + 10 \cdot 7 + 6 \equiv 100 \cdot 7^2 + 6^2 + 200 \cdot x \cdot 6 + 20 \cdot 7 \cdot 6 \pmod{1000}\\
\Leftrightarrow &100x + 40 \equiv 1740 + 200x \pmod{1000}\\
\Leftrightarrow &0 \equiv 700 + 100x \pmod{1000} \quad |: 100 \text{ Achtung: Modul auch dividieren}\\
\Leftrightarrow &0 \equiv 7 + x \pmod{10} \quad \Rightarrow x = 7.
\end{aligned}
$$

Die erste Lösung ist somit $a = 376$.

$z = 5$. Führt mit derselben Methode auf $a = 625$.

$z = 1$. Man erhält $x = y = 0$. Das stellt keine Lösung dar, da a dreistellig ist.

$z = 0$. In diesem Fall ist auch $x = y = 0$. Also keine weitere Lösung.

Also ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{376, 625\}$.

Bemerkung. Dadurch sind auch die höheren Potenzen kongruent zu a modulo 1000.

Aufgabe 4.16.

a) Für $n \geq 4$ gilt
$$n^2 < n^2 + 8 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$
Damit liegt $n^2 + 8$ zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen, ist also selber keine Quadratzahl. Die Fälle $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ probiert man einzeln und erhält die einzige Lösung $n = 1$.

b) Hier zeigt man für $n \geq 11$ die Ungleichung
$$(n-2)^2 = n^2 - 4n + 4 < n^2 - 3n + 11 < n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2,$$
wodurch wieder keine Lösung möglich ist. Für $n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ gibt es die drei Lösungen $n = 1$, $n = 2$ und $n = 10$.

Aufgabe 4.17.

Zunächst gilt $d_1 = 1$, also $1 + d_2^2 + d_3^2 = n$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: $3 \mid n$. Deshalb ist entweder d_2 oder d_3 gleich 3. Falls $d_3 = 3$ bleibt nur $d_2 = 2$ und damit

$$n = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

ein Widerspruch zu $3|n$. Deshalb gilt $d_2 = 3$ und modulo 3

$$1 + 3^2 + d_3^2 \equiv n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow d_2^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

Dies hat jedoch keine Lösungen, da die quadratischen Reste modulo 3 nur 0 und 1 sind.

Fall 2: $3 \nmid n$. Nun sind d_2 und d_3 beide nicht durch 3 teilbar. Für nicht durch 3 teilbare Zahlen x gilt

$$x \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 3$$

$$x \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3.$$

Somit gilt $n \equiv 1 + d_2^2 + d_3^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, also $3 \mid n$, ein Widerspruch.

Aufgabe 4.18.

Wir bezeichnen die Zahlen mit $x - 2$, $x - 1$, x, $x + 1$ und $x + 2$. Die Summe ihrer Quadrate ist dann gleich:

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 5(x^2 + 2)$$

Wäre diese Summe eine Quadratzahl, dann müsste sie auch durch 25 teilbar sein (weil wir sehen, dass sie durch 5 teilbar ist). Daraus folgt, dass $5 \mid (x^2 + 2)$, bzw. dass $x^2 \equiv 3 \pmod 5$. Aber 3 ist kein quadratischer Rest modulo 5. Daher kann diese Summe nicht durch 25 teilbar sein.

Aufgabe 4.19.

Eine Quadratzahl lässt bei der Division durch 4 die Reste 0 oder 1. Daher gilt

$$a^2 + b^2 - 4c \equiv 0 \mod (4) \quad \text{oder} \quad a^2 + b^2 - 4c \equiv 1 \mod (4) \quad \text{oder} \quad a^2 + b^2 - 4c \equiv 2 \mod (4).$$

Da die rechte Seite der Gleichung 3 ist, kann es keine ganzzahligen Lösungen geben.

Aufgabe 4.20.

Betrachte die quadratischen Reste bei Division durch 3.

k	k^2
0	0
1	1
2	1

Die linke Seite ist also entweder $\equiv 0 \pmod 3$ oder $\equiv 1 \pmod 3$.
Ist $n = 0$, so gilt $k^2 = \sqrt{21609} = 147$.
Sei nun $n \geq 1$: Dann gilt $21608 + 6^n \equiv 2 + 0 \equiv 2 \pmod 2$, also kann die rechte Seite nicht gleich der linken Seite sein.

Aufgabe 4.21.

Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$(n+2) \cdot (m-2) = 2016.$$

Weil $n + 2 > 2$, ist auch

$$m - 2 = \frac{2016}{n+2} > 0.$$

Andererseits ist $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Deshalb gilt

$$n + 2 = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$$

mit $0 \leq a < 6$, $0 \leq b < 3$, $0 \leq c < 2$, und, weil $n + 2 > 2$, zusätzlich $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ bzw. $(a, b, c) \neq (1, 0, 0)$. Also gibt es

$$34 = 6 \cdot 3 \cdot 2 - 2$$

Möglichkeiten für n. Zu jedem solchen n gibt es genau ein passendes m, nämlich

$$m = \frac{2016}{n+2} + 2.$$

Daher ist die gesamte Anzahl der Möglichkeiten 34.

Aufgabe 4.22.

Wir faktorisieren.

$$20xy - 4x - 5y - 27 = 0$$
$$(4x - 1) \cdot (5y - 1) = 28$$

Durch die Darstellung von 28 mit jeweils genau zwei Faktoren ($28 = 28 \cdot 1 = 14 \cdot 2 = 7 \cdot 4 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 14 = 1 \cdot 28$) erhält man alle Möglichkeiten und die Lösungsmenge $L = \{(2;\ 1)\}$.

Aufgabe 4.23.

Wir lösen die Aufgabe allgemein. Seien $a \neq 0$, b, c und d reelle Koeffizienten. Die diophantische Gleichung $axy + bx + cy + d = 0$ kann wie folgt faktorisiert werden:

$$\begin{aligned} axy + bx + cy + d &= 0 \quad \mid \cdot a \\ a^2xy + abx + acy - ad &= 0 \\ (ax + c) \cdot (ay + b) - bc + ad &= 0 \\ (ax + c) \cdot (ay + b) &= bc - ad \end{aligned}$$

Die Faktorisierung der rechten Seite (als Produkt in 2 Faktoren) liefert die möglichen Zerlegungen.

Bei unserem Beispiel kann $3xy+2x-5y-6 = 0$mit dieser Methode äquivalent in $(3x-5)(3y+2) = 8$ übergeführt werden.

Wir erhalten die Lösungsmenge $L = \{(2;\, 2); (3;\, 0); (1;\, -2); (-1;\, -1)\}$.

Aufgabe 4.24.

Das Paar (2; 1) ist Lösung der Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$ in den ganzen Zahlen. Durch Probieren kommt man vielleicht noch auf (7; 4).

Die gegebene Gleichung nennt man eine Pellsche Gleichung. Es handelt sich um eine quadratische Gleichung in zwei Variablen, deren ganzzahlige Lösungen gesucht sind. Dazu gibt es Theorie. Wir begnügen uns damit, zu zeigen, dass diese spezielle Gleichung unendlich viele Lösungen hat.

Dazu verwenden wir die elementare Zerlegung $a^2 - b^2 = (a - b)\cot(a + b)$, also

$$x^2 - 3y^2 = (x - \sqrt{3}y) \cdot (x + \sqrt{3}y)$$

Leider müssen wir eine auftretende Wurzel in Kauf nehmen. Wir formen die Gleichung weiter um

$$\begin{aligned} (x - \sqrt{3}y) \cdot (x + \sqrt{3}y) &= 1 \quad \mid^2 \\ (x - \sqrt{3}y)^2 \cdot (x + \sqrt{3}y)^2 &= 1^2 = 1 \\ \iff (x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3} \cdot xy) \cdot (x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3} \cdot xy) &= 1 \end{aligned}$$

Verwendet man die gegebene Lösung für $(x;\, y)$, so erhält man $(7 - 4\sqrt{3}) \cdot (7 + 4\sqrt{3}) = 1$, bzw. $7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$. Demnach ist auch das Paar (7; 4) Lösung der Gleichung.

Hätte man die gegebene Gleichung nicht zur zweiten Potenz, sondern zur n-ten Potenz erhoben, so hätten wir für jedes n eine Gleichung der Form $(A - B\sqrt{3}) \cdot (A + B\sqrt{3}) = 1$ erhalten mit dem Lösungspaar $(A;\, B)$.

Wir erhalten also für jede natürliche Zahle n eine Lösung und somit gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungspaare.

Führe diese Methode für $n = 3$ selbst durch!

Aufgabe 4.25.

Zunächst erkennt man, dass es bei $b = 0$ keine ganzzahlige Lösung gibt. Die Gleichung lässt sich nun umformen zu

$$(a - 2) \cdot b = a^3 - 2.$$

Da b eine ganze Zahle ungleich 0 ist, gilt $a - 2 \mid a^3 - 2$, wobei man vermutet, dass dies nur selten der Fall ist. In Bezug auf das vorige Beispiel versuchen wir ein Vielfaches von $a - 2$ zu finden, das nahe an $a^3 - 2$ liegt und man findet tatsächlich

$$(a - 2) \cdot (a^2 + 2a + 4) = a^3 - 8$$

(geometrische Reihe!).

Wir definieren wieder $g := \operatorname{ggT}(a - 2,\, a^3 - 2)$. Bei Lösungen der Gleichung gilt $a - 2 \mid a^3 - 2$ und somit $g = \operatorname{ggT}(a - 2,\, a^3 - 2) = a - 2$. Jedoch haben wir

$$g \mid a - 2 \Rightarrow g \mid a^3 - 8 \Rightarrow g \mid (a^3 - 2) - (a^3 - 8) = 6.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} & a - 2 \mid 6 \\ \Rightarrow\ & a - 2 \in \{-6, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 6\} \\ \Rightarrow\ & a \in \{-4, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}. \end{aligned}$$

Überprüft man diese Möglichkeiten auf $b = \frac{a^3-2}{a-2} \in \mathbb{Z}$ erhält man die 8 Lösungspaare $(a,\, b) \in \{(-4,\, 11), (-1,\, 1), (0,\, 1), (1,\, 1), (3,\, 25), (4,\, 31), (5,\, 41), (8,\, 85)\}$.

Aufgabe 4.26.

Die rechte Seite der Gleichung ist gerade, also auch die linke. Allgemein gilt: Die Zahlen t und t^2 haben denselben Rest bei Division durch 2.

Also sind entweder alle drei Zahlen gerade, oder genau eine der drei Zahlen ist gerade und die anderen beiden Zahlen sind ungerade.

1. Fall: alle drei gerade.

Seien $x = 2a$, $y = 2b$ und $z = 2c$ mit ganzen Zahlen a, b und c.

Einsetzen in die Gleichung ergibt: $a^2 + b^2 + c^2 = 4abc$.

Die rechte Seite ist durch 4 teilbar, die linke Seite ist genau dann durch 4 teilbar, wenn sowohl a, b als auch c gerade sind (betrachten der linken Seite modulo 4.) Dieses Argument kann unendlich weiter fortgeführt werden (*unendlicher Abstieg*) und führt dadurch auf einen Widerspruch, ausgenommen $x = y = z = 0$. Dieses Tripel ist die einzige Lösung in diesem Fall.

2. Fall: zwei ungerade.

Sei o.B.d.A. x gerade. Dann können wir schreiben: $x = 2a, y = 2b + 1$ und $z = 2c + 1$ mit ganzzahligen Werten a, b und c.

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$4a^2 + 4b^2 + 4b + 1 + 4c^2 + 4c + 1 = 4a \cdot (2b + 1) \cdot (2c + 1)$$

Betrachte die Gleichung modulo 4

$$2 \equiv 0 \pmod 4,$$

das ist ein Widerspruch.

Aufgabe 4.27.

1. Lösung. Die Gleichung ist linear in x. Wir formen nach x um und erhalten

$$x = \frac{24 - 3y^2}{2y} = \frac{3(8 - y^2)}{2y}$$

also $2 \mid 8-y^2$, da x ganzzahlig ist.

Somit gilt auch $2 \mid y$ und wir schreiben $y = 2z$ für eine ganze Zahl z.:

$$x = \frac{3(8 - 4z^2)}{4z} = \frac{3(2 - z^2)}{z}$$

und somit $z \mid 6-3z^2$, da x ganzzahlig ist.

Da $z \mid 3z^2$ folgt, dass $z \mid 6$ und demnach $z \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.

Diese 8 Fälle führen sofort auf
$\mathbb{L} = \{(3,\ 2); (-3,\ 2); (-3,\ 4); (3,\ -4); (-7,\ 6); (7,\ -6); (-17,\ 12); (17,\ -12)\}$.

2. Lösung. Die Gleichung ist eine quadratische Gleichung in y. Wir wenden die allgemeine Lösungsformel auf $3y^2 + 2x \cdot y - 24 = 0$ an:

$$y_{1,\,2} = \frac{-2x \pm 2 \cdot \sqrt{x^2 + 3 \cdot 24}}{6}.$$

Da y ganzzahlig ist, muss die Diskriminante $D = x^2 + 3 \cdot 24$ eine Quadratzahl sein, also

$$x^2 + 72 = t^2$$
$$\Leftrightarrow (t - x) \cdot (t + x) = 72$$

für eine ganze Zahl $t \geq 0$.

Durch Zerlegung von 72 in das Produkt zweier Faktoren,
$72 = (\pm 1) \cdot (\pm 72) = (\pm 2) \cdot (\pm 36) = (\pm 3)(\pm 24) = \ \ldots$
ergeben sich alle Fälle, die sofort zu obiger Lösungsmenge führen.

Aufgabe 4.28.

Wir stellen fest, dass $|a| \leq 2$ sein muss, folglich $a \in \{0,\ \pm 1,\ \pm 2\}$. Wir unterscheiden demnach die folgenden Fälle:

$a = 0$. Die einzige Möglichkeit ist $3^2 + 1^2 + 0 = 10$.
Somit ist $(b,\ c,\ d)$ eine Variation der Menge $(\pm 3,\ \pm 1,\ 0)$. Teilen wir zunächst die drei Ziffern zu, so gibt es dafür 3! Variationen. Jede Zuteilung hat danach dann 4 Möglichkeiten für die Wahl der beiden Vorzeichen (beides positiv, eines negativ, beide negativ).
Insgesamt sind das $3! \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

$|a| = 1$. Ein Lösungstripel $(b,\ c,\ d)$ der Gleichung $b^2 + c^2 + d^2 = 8$ kann nur eine Variation der Menge $(\pm 2,\ \pm 2,\ 0)$ sein. Es gibt $3 \cdot 2^2 = 12$ Variationen dieser Menge und da $a \in \{\pm 1\}$ ist, sind das $2 \cdot 12 = 24$ Möglichkeiten für diesen Fall.

$|a| = 2$. Die Gleichung $b^2 + c^2 + d^2 = 2$ ist nur für eine Variation der Menge $(\pm 1,\ \pm 1,\ 0)$ erfüllt.
Wiederum erhalten wir wie im vorherigen Fall 2 Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also 72 Lösungen.

Quellenangabe zu den Aufgaben

Aufgabe 1.1. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.2. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.3. vom MmF-Team

Aufgabe 1.4. vom MmF-Team

Aufgabe 1.5. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2011 (nachzulesen in [20]), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.6. aus [8, Bsp. 56] bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 1.7. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2014 (nachzulesen in [20]), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.8. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2016 (nachzulesen in [20]), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.9. Junior-Regionalwettbewerb 2019, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.10. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.11. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.12. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.13. Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 2014 (nachzulesen in [20]), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.14. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.15. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2002 (nachzulesen in [19]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.16. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2003 (nachzulesen in [19]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.17. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2005 (nachzulesen in [19]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.18. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2007 (nachzulesen in [19]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.19. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2008 (nachzulesen in [19]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.20. Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 2013 (nachzulesen in [20]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.21. aus [16], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 1.22. Bekannter Satz. Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.23. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2011 (nachzulesen in [20]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.24. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2012 (nachzulesen in [20]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.25. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2018, (siehe [5]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.26. aus [22, S. 168], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.27. aus [22, S. 108], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.28. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 1995 (Gerd Baron, nachzulesen in [18]), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.29. aus [16], von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.30. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.31. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.32. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2008 (Karl Czakler, nachzulesen in [19]), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.33. aus Art of Problem-Solving, übersetzt von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.34. Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 2016 (Walther Janous, nachzulesen in [20]), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.35. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.36. aus [22, S. 177], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.37. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2015 (Walther Janous, siehe [3]), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 1.38. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.39. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2015 (Richard Henner, siehe [3]), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 1.40. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2013, (Karl Czakler, siehe [2]). Lösung von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.41. aus [22, S. 107], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

*H*inweis. Im Buch liegt hier ein Übersetzungsfehler vor, das Dreieck muss nicht gleichseitig sein. Das lässt sich leicht am Beispiel $a = b = 2$ und $c = 1$ sehen. Für jedes zulässige n erfüllt das Tripel $(2^n, 2^n, 1)$ die Dreiecksungleichung.

Aufgabe 1.42. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.43. aus [21], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 1.44. aus [22, S. 111], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.45. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.46. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.1. von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.2. a.) und b.) von Inna Roitberg
c.) aus [23, S.67], übersetzt von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team
d.) aus [13], übersetzt von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.3. von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.4. von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.5. aus [12], (UTJM XLV, 20.-26. Februar 2015, Kirow, Russland, S. Volchenkov und S. Berlov), übersetzt von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.6. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.7. von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.8. von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.9. aus [15], übersetzt von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.10. von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.11. von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.12. Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.13. Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.14. Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.15. Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.16. Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.17. Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.18. Bekanntes Resultat. Verfasst von Josef Greilhuber und Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.19. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.20. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.21. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.22. von Nina Mitrović und Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.23. Bekannte Tatsache. Formuliert von Nina Mitrović und Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.24. Bekanntes Beispiel. Formuliert von Nina Mitrović und Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.25. aus [17, S. 40/E 1], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.26. aus [21, S. 22], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 2.27. aus [21, S. 68], bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 2.28. Bekanntes Beispiel. Formuliert von Nina Mitrović und Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.29. von Nina Mitrović und Josef Greilhuber bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.30. Bekanntes Beispiel. Formuliert von Nina Mitrović und Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.31. Kroatischer Regionalwettbewerb 2016 (siehe [6]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.1. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.2. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2016 (Gottfried Perz, siehe [4]), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.3. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.4. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.5. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.6. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.7. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.8. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2012 (nachzulesen in [20]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.9. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.10. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2009 (Walther Janous, nachzulesen in [20]), bearbeitet von Karl Czakler und vom MmF-Team

Aufgabe 3.11. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2013, (siehe [5]). Lösung von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.12. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2011 (nachzulesen in [20]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.13. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.14. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.15. aus [14, S. 50], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.16. Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 2016 (Karl Czakler, siehe [9]), bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.17. aus [8, Bsp. 56] bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.18. Aufgabe 561244 der Deutschen Mathematik-Olympiade (siehe [1]) (56. Deutsche Mathematik-Olympiade 2016/2017, Klassenstufe 12, 4. Runde [Bundesrunde] Aufgabe 4), bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 3.19. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.1. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.2. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.3. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.4. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.5. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.6. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2012 (nachzulesen in [20]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.7. Landeswettbewerb für Anfänger*innen 2009 (nachzulesen in [20]). Lösung von Josef Greilhuber, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.8. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.9. Vorrunde Schweizer Mathematik-Olympiade 2018 (siehe [10]), bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team.

Aufgabe 4.10. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.11. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.12. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.13. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.14. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.15. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.16. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.17. von Jakob Steininger, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.18. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.19. von Karl Czakler, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.20. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.21. Kroatischer Regionalwettbewerb (siehe [7]), übersetzt von Nina Mitrović, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.22. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.23. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.24. von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.25. Vorrunde der Schweizer Mathematik-Olympiade 2019 (siehe [11]), bearbeitet von Jakob Steininger und vom MmF-Team

Aufgabe 4.26. aus [17, S. 124], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.27. aus [22, S.227/ VII], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.28. Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 2009 (nachzulesen in [20]), bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Matheamtik-Olympiade. https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv. (aufgerufen am 10. November 2020).

[2] Junior-Regionalwettbewerb 2013. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/513. (aufgerufen am 10. November 2020).

[3] Junior-Regionalwettbewerb 2015. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/102. (aufgerufen am 10. November 2020).

[4] Junior-Regionalwettbewerb 2016. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/204. (aufgerufen am 10. November 2020).

[5] Junior-Regionalwettbewerb 2018. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/440. (aufgerufen am 10. November 2020).

[6] Kroatischer Regionalwettbewerb 2016. http://www.iccg.co.me/1/index.php?option=com_content&view=article&id=769. (aufgerufen am 10. November 2020).
[7] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm. (aufgerufen am 10. November 2020).
[8] Österreichische Mathematik-Olympiade skriptum. wettbewerbsaufgaben von 1970–1975.
[9] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2016. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/149. (aufgerufen am 10. November 2020).
[10] Schweizer Vorrunde 2018. https://imosuisse.ch/smo/pruefungen/smo2018/vorrunde/pruefung/vorrunde_2018_de.pdf. (aufgerufen am 10. November 2020).
[11] Schweizer Vorrunde 2019. https://imosuisse.ch/smo/pruefungen/smo2019/vorrunde/pruefung/vorrunde_2019_de.pdf. (aufgerufen am 10. November 2020).
[12] Uralien Turnier Junger Mathematiker (UTJM). http://turmath.ru/uraltur/archive.php. Russische Webseite (aufgerufen am 10. November 2020).
[13] Nauka i zhizn (science and life). https://www.nkj.ru/, 1986. Naturwissenschaftsmagazin, das bereits 1890 erschien und nun in Russland in russicher Sprache erscheint. (aufgerufen am 10. November 2020).
[14] Titu Andreescu. *Mathematical Olympiad Treasures*. Birkhäuser, 2006.
[15] I. L. Babinskaja. *Aufgaben für mathematische Olymiaden*. Nauka, 1975. vergriffen.
[16] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.
[17] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.
[18] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen*. öbv, 1999.
[19] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2018. Auflage 1.3.
[20] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.
[21] Natalia Grinberg. *Lösungsstrategien: Mathematik für Nachdenker*. Harri Deutsch Verlag, 2008.
[22] Jiri Herman, Radan Kučera, Radan Kucera, Jaromír Šimša, and Jaromir Simsa. *Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2000.
[23] S. Rabinowitz and M. Bowron. *Index to Mathematical Problems 1975–1979*. MathPro Press, Westford, MA, 2002.