51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 13. Dezember 2019

1. Anton und Berta spielen am 13.12.2019 ein fröhliches Spiel. Sie vereinbaren die Startzahl 19 und folgende Regel: Anton beginnt und zählt wahlweise 12 oder 13 dazu. Dann zählt Berta 12 oder 13 dazu, dann wieder Anton, und so weiter. Wenn jemand 2019 erreicht, hat er oder sie gewonnen. Wird 2019 überschritten, endet das Spiel unentschieden. Wer von den beiden hat eine Taktik, mit der er oder sie gewinnen kann?

2. Spielen wir das 19er-Spiel, und das geht so: Jede/r zerlegt die Zahl 19 in eine Summe von zwei oder mehreren Summanden und rechnet dann das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Summanden aus.
   Gewonnen hat, bei wem dieses kgV am größten ist.

3. Anton und Berta, die beiden Klassenbesten der 3.D, vereinbaren folgendes Spiel: Sie schreiben abwechselnd gute Zahlen an die Tafel, Anton beginnt und keine Zahl darf zweimal geschrieben werden. Unter „guten Zahlen“ verstehen sie vierstellige Zahlen, die die Ziffern 2, 0, 1 und 9 nicht enthalten. Wer die letzte Zahl schreiben kann, gewinnt.
   Wer wird Sieger sein?

4. Weil der 3.D das gefällt, beschließen sie, das Spiel zu wiederholen, aber so, dass alle 21 Schüler/innen teilnehmen. Es sitzen drei Mädchen, dann drei Buben, dann drei Mädchen, u.s.w., und in dieser Reihenfolge wird gespielt.
   Wer gewinnt, ein Bub oder ein Mädchen?

5. Alice spielt gegen Bob das 1, 2, 3 - Spiel, und das geht so: Alice wählt eine zweistellige natürliche Zahl, die keine Primzahl ist, als Startzahl. Bob addiert zu dieser Zahl 1, 2 oder 3. Erreicht er damit eine Primzahl, so hat er gewonnen. Wenn nicht, so addiert Alice zu seiner Zahl 1, 2 oder 3. Erreicht sie damit eine Primzahl, so hat sie gewonnen. Wenn nicht, so geht das Spiel so lange weiter, bis jemand eine Primzahl erreicht und damit gewonnen hat. Man bestimme alle Startzahlen, mit denen Alice gewinnt.

6. Auf einer Tafel stehen die Zahlen von 1 bis 100. Alice darf in jedem Spielzug zwei Zahlen durch deren Summe ersetzen. Kann sie erreichen, dass am Schluss eine einzige ungerade Zahl auf der Tafel steht? [1][Beispiel 3.7]

7. Alice und Bob erzeugen gemeinsam eine Zahl mit 2019 Stellen, indem sie abwechselnd eine Ziffer an einer bestimmten Stelle festlegen, wobei Alice beginnt. Kann Alice immer erreichen, dass diese Zahl durch 30 teilbar ist?
   (Kanon für Fortgeschrittene, Beispiel 3.8, leicht abgeändert)

8. Zwei Spieler legen abwechselnd kongruente Münzen auf einen rechteckigen Tisch, ohne dass sich zwei Münzen irgendwie überlappen dürfen. Wer zuerst keine Münze mehr auf dem Tisch unterbringen kann, verliert.
   Gibt es für einen Spieler eine Gewinnstrategie?

9. Anton und Bernhard spielen das 2015er-Spiel, und das geht so: Anton wählt eine der Zahlen 5, 9 oder 13, Bernhard wählt dann eine der beiden anderen. Anschließend addieren sie abwechselnd immer wieder 2015 zu ihrer Zahl. Gewonnen hat, wer zuerst eine Primzahl erreicht.
   Wie sollen die beiden spielen?

10. Anton und Berta spielen ein Kartenspiel. Sie haben $2n$ Karten und schreiben auf jede Karte eine positive Zahl. Die Karten werden gemischt und in einer Reihe mit der Zahl nach oben aufgelegt. Anton beginnt und wählt eine Karte an einem der beiden Enden. Dann nimmt Berta eine Karte von einem Ende, u.s.w., bis Berta die letzte Karte nimmt. Gewonnen hat, wer am Ende die größere Summe in den Karten hat.
    Man zeige, dass es eine Gewinnstrategie für Anton gibt.

Literatur

[1] Gerhard Kirchner. Leitfaden für den RWF (Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene). `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/89`. (aufgerufen am 23.12.2019).