# 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 13. März 2020

1. Man beweise, dass für alle $x \geq 505$ die Ungleichung $x^3 - 509x^2 + 2024x \geq 2020$ gilt.

   Für welche $x$ gilt das Gleichheitszeichen?

2. Wenn man eine dreistellige natürliche Zahl zweimal hintereinander schreibt, so entsteht eine Zahl, die wir eine „sechsstellige Doppelzahl“ nennen.

   Man bestimme die Anzahl aller sechsstelligen Doppelzahlen, die sich jeweils als Produkt von sieben paarweise verschiedenen Primzahlen schreiben lassen.

3. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig ($BC = AC$). Das Dreieck ACD ist gleichseitig. C liegt im Inneren der Strecke BD. Das Dreieck DBE ist gleichseitig.

   Man beweise, dass entweder D auf der Streckensymmetrale von BE liegt oder B auf der Streckensymmetrale von ED.

4. Man bestimme die kleinste natürliche Zahl $n$, für die $2020 + 4 \cdot n^2$ durch 43 teilbar ist.

5. Wir nennen eine natürliche Zahl „schön“ , wenn sie das Produkt von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist. 2020 ist z.B. keine schöne Zahl, wohl aber $2184 = 12 \cdot 13 \cdot 14$.

   Man bestimme die Summe aller schönen Zahlen, die kleiner als 2020 sind.

6. Am 6.3.2020 schreibt Georg alle positiven ganzen Zahlen an, die kleiner als 2020 sind und durch 3 aber nicht durch 6 teilbar sind.

   (a) Wie viele Zahlen hat er angeschrieben, die das Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen sind?

   (b) Wie viele Quadratzahlen hat er angeschrieben?

7. Es sei ABCD ein Rechteck mit $AD < AB$. Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AD und N der Mittelpunkt der Strecke BC. Der Punkt E sei der Fußpunkt des Lotes von B auf die Gerade CM.

   (a) Man zeige, dass ANEM ein gleichschenkeliges Trapez ist.

   (b) Man zeige, dass die Fläche des Vierecks ABNE halb so groß ist wie die Fläche des Rechtecks ABCD.

8. Man bestimme alle ganzen Zahlen x, y und z, für die $3^x + 6y = 2^z$ gilt.