51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 8. Mai 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Josef Pech zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 5. Mai 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Pech bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 8. Mai 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns,wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Löse in den positiven ganzen Zahlen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$$

Aufgabe 2. Der Punkt M liege im Inneren des Quadrats $ABCD$. Die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM werden mit P, Q, R und S bezeichnet.
Das Viereck $PQRS$ überdeckt welchen Anteil des Quadrats $ABCD$?

Aufgabe 3. In wie viele Bereiche teilen n Geraden die Zeichenebene höchstens?

Aufgabe 4. Für alle positiven Zahlen a, b und c gilt:

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Aufgabe 5. $ABCD$ sei ein Tangentenviereck, wobei keine Seiten parallel sind. Weiters seien die Punkte E bzw. F die Schnittpunkte der Geraden BA mit CD bzw. AD mit BC.
Zeige folgende Eigenschaften:

a) $AB + CD = BC + DA$

Beweise auch die Umkehrung (*also: wenn diese Gleichung gilt, so handelt es sich um ein Tangentenviereck*)

b) $EA + AF = EC + CF$

c) $BE - BF = ED - DF$

Bemerkung: Ein Tangentenviereck *ist ein Viereck, das einen Inkreis besitzt, die Seiten also Tangenten eines Kreises k sind*

Aufgabe 6. Löse in den ganzen Zahlen

$$20xy - 4x - 5y - 27 = 0$$

Aufgabe 7. Löse in den ganzen Zahlen

$$3xy + 2x - 5y - 6 = 0$$

Aufgabe 8. $ABCD$ sei ein Sehnenviereck mit Umkreis k. Verlängert man AB über B hinaus und DC über C hinaus, so schneiden einander die beiden Geraden AB und DC in S. k_1 ist jener Kreis, der durch A und B geht und CD in F berührt. k_2 ist jener Kreis, der durch C und D geht und AB in H berührt.
Zeige, dass der Normalabstand des Punktes H von CD gleich groß ist wie der Normalabstand des Punktes F von AB.

Aufgabe 9. Wenn sich die beiden Zahlen m und n jeweils als Summe von zwei Quadraten darstellen lassen, so gilt das auch für das Produkt $m \cdot n$. Zeige dies.

Bemerkung: Diese Erkenntnis geht auf Diophantos von Alexandria *zurück und wird* *Brahmagupta-Fibonacci-Identität* *genannt.*

Aufgabe 10. Seien a, b und c ganze Zahlen.
Beweise: Wenn die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mindestens eine rationale Lösung besitzt, so sind nicht alle drei Zahlen a, b und c ungerade.

Aufgabe 11. Die Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$ hat in den ganzen Zahlen die Lösung $(2; 1)$.
Gib eine weitere Lösung an und zeige, dass sogar unendlich viele ganzzahlige Lösungen existieren.

Bemerkung: *Gleichungen, die in den ganzen Zahlen zu lösen sind, nennt man* Diophantische Gleichungen.
Diophantos von Alexandria *lebte irgendwann zwischen 100 v.Chr. und 350 n. Chr. Genaueres weiß man nicht. Er hat sich mit Fragen der Algebra und Zahlentheorie beschäftigt.*

Aufgabe 12. Auf den Seiten BC, CA und AB werden in dieser Reihenfolge Punkte A', B' und C' jedoch nicht die Endpunkte gewählt. Sei k_1 der Umkreis des Dreiecks ABC', k_2 der Umkreis des Dreiecks $BA'C$ und k_3 der Umkreis des Dreiecks $CA'B$.
Zeige, dass die drei Kreise einen Punkt gemeinsam haben.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Nicht alle 3 Zahlen können größer oder gleich drei sein.

Aufgabe 2. Verbinde P mit Q. Welche Lage in Bezug auf das Quadrat hat diese Strecke? Lässt sich auch sofort eine Aussage über die Länge von PQ machen?

Aufgabe 3.

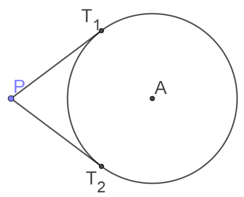
Erstelle eine Tabelle. Überlege, wie viele Bereiche zusätzlich entstehen, wenn eine neue Gerade dazukommt. Bezeichne die maximale Anzahl an Bereichen bei n Geraden mit b_n.

n	b_n
0	1
1	2
2	4

Aufgabe 4. Setze mehrfach die AM-GM Mittelungleichung ein: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Aufgabe 5.

Die Länge der Tangentenabschnitte (Entfernung eines Punktes P, der außerhalb eines Kreises k liegt, vom Berührpunkt der Tangente) ist für beide Tangenten gleich groß.



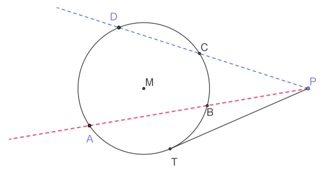
Aufgabe 6. Faktorisiere den Term.

Aufgabe 7. Faktorisiere den Term. Das ist hier etwas schwieriger als bei Aufgabe 6. Deshalb ist der „Trick 47“ angebracht: Multipliziere zuerst die Gleichung mit 3. (Warum 3?)

Aufgabe 8.

Sehnen-Tangentensatz anwenden:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2$$



Aufgabe 9. Ansatz: $m = a^2 + b^2$ und $n = c^2 + d^2$, dann ausmultiplizieren

Aufgabe 10. $x = \frac{p}{q}$ einsetzen.
Setze voraus, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.

Aufgabe 11. Faktorisiere die linke Seite der Gleichung mittels

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Anschließend hoch 2, hoch 3, ...
Leider muss man das Auftreten einer Wurzel in Kauf nehmen.

Aufgabe 12. Peripheriewinkelsatz in zwei der drei Kreise anwenden.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wenn alle drei Zahlen größer oder gleich 3 sind, so ist die linke Seite kleiner oder gleich 1.
Also muss mindestens eine der drei Zahlen aus der Menge $\{1;\ 2\}$ sein.

1. Fall: $a = 1$
   In diesem Fall sind für b und c jede Auswahl zielführend:
   $L_1 = \{(1;\ u;\ v)$ mit u und v ganzzahlig$\}$.

2. Fall: $a = 2$
   Die Gleichung lautet:
   $$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
   Wenn beide Zahlen b und c größer oder gleich 4 sind, so ist die linke Seite höchstens $\frac{1}{2}$, dies führt also zu keiner Lösung.

   Also ist eine der beiden Zahlen kleiner oder gleich 3.

   2a) $b = 1$: Dann ist c beliebig, Lösung ist im 1. Fall bereits dargestellt.
   2b) $b = 2$: Dann ist c beliebig, $L_2 = \{(2;\ 2;\ t)$ mit t ganzzahlig$\}$
   2c) $b = 3$: Dies führt auf $\frac{1}{c} > \frac{1}{6}$, also $c < 6$, $c \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$
   $L_3 = \{(2;\ 3;\ 1), (2;\ 3;\ 2), (2;\ 3;\ 3), (2;\ 3;\ 4), (2;\ 3;\ 5)\}$

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge

$$L_{\text{ges}} = \{(1;\ u;\ v); (2;\ 2;\ t); (2;\ 3;\ 3); (2;\ 3;\ 4); (2;\ 3;\ 5)\}_{\text{Perm}}$$

Bemerkung. Perm bedeutet, dass jede Permutation einer Lösung ebenfalls Lösung der Ungleichung ist. In anderen Worten: ist das Tripel $(x; y; z)$ Lösung, so auch $(x; z; y)$, $(y; x; z)$, $(y; z; x)$, $(z; x; y)$ und $(z; y; x)$.

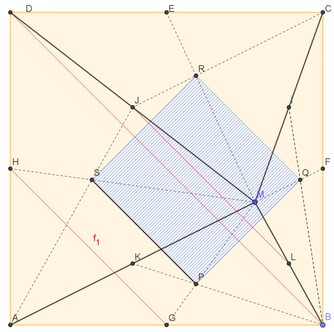
Aufgabe 2.

Wir berechnen den Anteil auf zwei Arten.
1. Art: Verwendung von Koordinaten.
Die Koordinaten der Punkte legen wir wie folgt fest: $A(0 \mid 0)$; $B(a \mid 0)$; $C(a \mid a); D(0 \mid a)$ und $M(x \mid y)$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$ und $0 < x, y < a$.
Die Punkte P, Q, R und S lassen sich nun mittels Schwerpunktformel wie folgt bestimmen:

$$P = \frac{1}{3}(A + B + M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a + x \\ y \end{pmatrix}$$
$$Q = \frac{1}{3}(B + C + M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a + x \\ a + y \end{pmatrix}$$
$$R = \frac{1}{3}(C + D + M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a + x \\ 2a + y \end{pmatrix}$$
$$S = \frac{1}{3}(D + A + M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ a + y \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\vec{PQ} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{QR} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}.$$



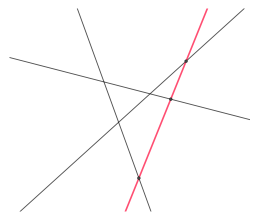
Also sind die beiden Vektoren orthogonal (das Skalarprodukt ist 0) und offenbar gleich lang, $PQRS$ ist also ein Quadrat. PQ ist parallel zur Diagonlae AC und QR ist parallel zu BD.
$|\vec{PQ}| = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ und der Inhalt de Quadrats $PQRS$ ist somit $\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}a^2$ und der gesuchte Faktor ist $\frac{2}{9}$.

2. Art: Verhältnisse.
Sei H_a der Halbierungspunkt von MB. Q teilt die Strecke H_aC im Verhältnis $1:2$ und P teilt die Strecke H_aA im Verhältnis $1:2$. Somit ist $x = PQ$ ein Drittel von AC.
$x = \frac{1}{3}a \cdot \sqrt{2}$ und der Inhalt des Quadrats beträgt $a^2 \cdot \frac{2}{9}$.

Aufgabe 3.

Die maximale Anzahl an Bereichen wird genau dann erreicht, wenn einander alle Geraden paarweise schneiden und keine drei Geraden einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Sei b_n diese maximale Anzahl bei n Geraden.

Gezeichnet sind drei schwarze Geraden, die die Ebene in 7 Bereiche zerlegen, was offensichtlich optimal ist. Es gilt demnach $b_3 = 7$. Diese Bereiche sind entweder Dreiecke oder von Geraden begrenzte Bereiche mit endlichem oder unendlichem Inhalt. Wir ergänzen eine vierte Gerade g_{neu}. Sie schneidet die drei schon vorhandenen Geraden in 3 Punkten. Dadurch wird g_{neu} in 4 Abschnitte zerlegt. Jeder dieser Abschnitte eröffnet einen weiteren Bereich durch Zerteilung eines schon bestehenden.



n	B_n
0	1
1	2
2	4
3	4+3
4	7+4
5	11+5
$\vdots$	$\vdots$
n	b_n
$n+1$	b_n + n+1

Wir erhalten somit allgemein $b_n + (n+1)$ Bereiche bei $n+1$ Geraden, wie durch die nebenstehenden Tabelle noch einmal verdeutlicht wird.

Die gesuchte Anzahl b_n ist demnach $\frac{n^2+n+2}{2}$.

(Da die Differenzenfolge $(b_{n+1} - b_n = n+1)$ durch einen linearen Ausdruck festgelegt ist, lässt sich b_n durch einen quadratischen Ausdruck darstellen.)

Aufgabe 4.

Mittels AM-GM Mittelungleichung gilt:

$$\frac{a^8+b^8}{2} \geq \sqrt{a^8b^8} = a^4b^4$$
$$\frac{b^8+c^8}{2} \geq \sqrt{b^8c^8} = b^4c^4$$
$$\frac{c^8+a^8}{2} \geq \sqrt{c^8a^8} = c^4a^4$$

Addiert man diese drei Ungleichungen ergibt das

$$\frac{2a^8+2b^8+2c^8}{2} \geq a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 \tag{1}$$

Wendet man nun wiederum die AM-GM Mittelungleichung auf die Terme der rechten Seite an, erhält man

$$\frac{a^4b^4+b^4c^4}{2} \geq \sqrt{a^4b^8c^4} = a^2b^4c^2$$
$$\frac{b^4c^4+c^4a^4}{2} \geq \sqrt{a^4b^4c^8} = a^2b^2c^4$$
$$\frac{a^4b^4+c^4a^4}{2} \geq \sqrt{a^8b^4c^4} = a^4b^2c^2$$

Addiert man diese drei Ungleichungen, so erhält man

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 \geq a^2b^4c^2+a^2b^2c^4+a^4b^2c^2 = a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2) \tag{2}$$

Wir verwenden nun die bekannte Ungleichung $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ und erhalten somit zusammen mit (1) und (2) die Ungleichung

$$a^8+b^8+c^8 \geq a^2b^2c^2(bc+ca+ac) \quad |: a^3b^3c^3$$
$$\iff \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

was zu zeigen war.
Bemerkung: Es gibt viele Arten, die Gültigkeit für die hier im Beweis verwendete Ungleichung $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ nachzuweisen. Für positive reelle Zahlen a, b, c kann man dieselbe Idee anwenden, die in diesem Beispiel verwendet wurde: Starte mit $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = ab$ usw.
Eine andere Möglichkeit ist die Multiplikation der Ungleichung mit 2 und das Verwenden der 2. Binomischen Formel, um Summen vollständiger Quadrate zu erhalten:
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0 \iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$.

Aufgabe 5.

Wir verwenden die Tatsache, dass die Länge der Tangentenabschnitte (Entfernung eines Punktes P, der außerhalb eines Kreises k liegt, vom Berührpunkt der Tangente) für beide Tangenten von P an k gleich groß sind.

a) Bei entsprechender Beschriftung (wie in der Abbildung unten links dargestellt mit Berührpunkten P, Q, R und S) ist die Gleichung $AB+CD=BC+DA$ sofort abzulesen.

Umkehrung. Sei $ABCD$ ein allgemeines Viereck und $AECD$ mit E auf der Strecke AB ein Tangentenviereck, wie in der mittleren Abbildung dargestellt. Im Dreieck BCE gilt: $BC < CE + EB$.
Da $AECD$ ein Tangentenviereck ist, gilt (wie wir soeben gezeigt haben):

$$\begin{aligned} AE + CD &= CE + AD \quad \mid +\mathbf{EB} \\ AE{+}\mathbf{EB} + CD &= CE + +\mathbf{EB} + AD > BC + AD \\ AB + CD &> BC + AD \end{aligned}$$

Also gilt die entsprechend Gleichung nicht.

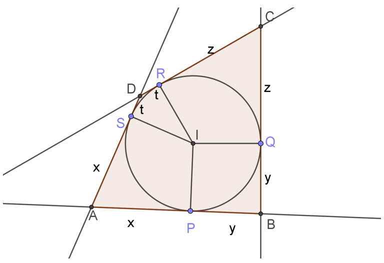
b) Wir verwenden die Bezeichnungen wie in der Abbildung rechts dargestellt. Die behauptete Gleichung lässt sich wie folgt umformen:

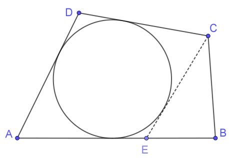
$$\begin{aligned} EA + AF &= EC + CF \\ (EP - x) + (FS + x) &= (ER + z) + (FQ - z) \\ EP + FS &= ER + FQ \end{aligned}$$

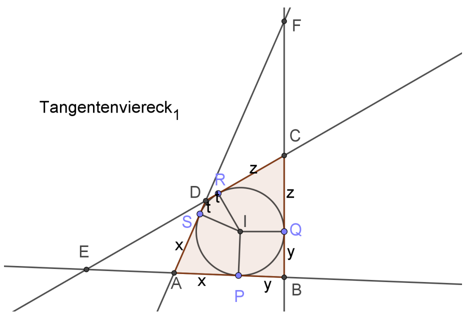
Wir wissen, dass aufgrund der Eigenschaft der Tangentenabschnitte, $EP = ER$ und $FS = FQ$ gilt und damit die letzte Gleichung erfüllt ist. Somit ist auch die Gleichheit $EA{+}AF = EC{+}CF$ bewiesen.

c) Analog wie bei **b)** formen wir die Gleichung zu einer wahren Aussage um:

$$\begin{aligned} EB - BF &= ED - DF \\ (EP + y) - (FQ + y) &= (ER - t) - (FS - t) \\ EP - FQ &= ER - FS \end{aligned}$$







Aufgabe 6.

Wir faktorisieren.

$$\begin{aligned} 20xy - 4x - 5y - 27 &= 0 \\ (4x - 1) \cdot (5y - 1) &= 28 \end{aligned}$$

Durch die Darstellung von 28 mit jeweils genau zwei Faktoren ($28 = 28 \cdot 1 = 14 \cdot 2 = 7 \cdot 4 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 14 = 1 \cdot 28$) erhält man alle Möglichkeiten und die Lösungsmenge $L = \{(2;\ 1)\}$.

Aufgabe 7.

Wir lösen die Aufgabe allgemein. Seien $a \neq 0$, b, c und d reelle Koeffizienten. Die diophantische Gleichung $axy + bx + cy + d = 0$ kann wie folgt faktorisiert werden:

$$\begin{aligned} axy + bx + cy + d &= 0 \quad \mid \cdot a \\ a^2xy + abx + acy - ad &= 0 \\ (ax + c) \cdot (ay + b) - bc + ad &= 0 \\ (ax + c) \cdot (ay + b) &= bc - ad \end{aligned}$$

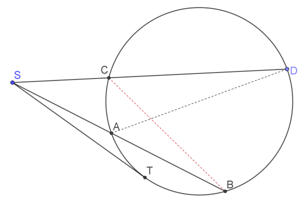
Die Faktorisierung der rechten Seite (als Produkt in 2 Faktoren) liefert die möglichen Zerlegungen. Bei unserem Beispiel kann $3xy+2x-5y-6 = 0$mit dieser Methode äquivalent in $(3x-5)(3y+2) = 8$ übergeführt werden.
Wir erhalten die Lösungsmenge $L = \{(2;\, 2); (3;\, 0); (1;\, -2); (-1;\, -1)\}$.

Aufgabe 8.

Wir verwenden den *Sehnen-Tangentensatz*:

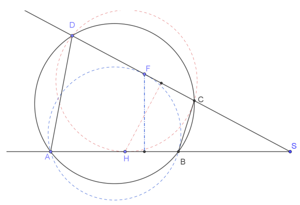
Satz*(Sehnen-Tangentensatz).* Sei S der Schnittpunkt zweier (nicht paralleler) Sehnen AB und CD eines Kreises k, die einander außerhalb von k schneiden. Sei T einer der Tangentenschnittpunkte der Tangenten von S an k. Dann gilt:

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD = ST^2$$



Beweisidee. Die Dreiecke SAD und SBC sind zueinander ähnlich, Durch Ansetzen der entsprechenden Proportionen ergibt sich die Behauptung. □
Im Bild rechts ist die Situation dargestellt. Mit dem Sehen-Tangentensatz gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} SA \cdot SB &= SC \cdot SD && \text{in Kreis } k \\ SA \cdot SB &= SF^2 && \text{in Kreis } k_1 \\ SC \cdot SD &= SH^2 && \text{in Kreis } k_2 \end{aligned}$$



Also gilt: $SF = SH$ und folglich ist das Dreieck SHF gleichschenkelig und die beiden Höhen sind gleich

$$d(F;\, AB) = d(H;\, CD)$$

Aufgabe 9.

Seien $m = a^2 + b^2$ und $n = c^2 + d^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} m \cdot n = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = \\ &= (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Von diesem Resultat gibt es eine Erweiterung von Brahmagupta, die sogenannte

Brahmagupta-Identität

$$(a^2+nb^2)(c^2+nb^2) = (ac-nbd)^2+n(ad+bc)^2 = (ac+nbd)^2+n(ad-bc)^2$$

Aufgabe 10.

Seien a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Setze für $x = \frac{p}{q}$ in die Gleichung $ax^2+bx+c=0$ ein. Der Bruch $\frac{p}{q}$ sei vollständig gekürzt. Multiplikation mit q^2 liefert

$$ap^2+bpq+cq^2=0$$

Wir zeigen, dass wenn alle 3 Koeffizienten ungerade sind, die linke Seite kongruent $1 \pmod 2$ ist. Bezeichne g eine gerade Zahl und u eine ungerade Zahl.

	p	q	$ap^2+bpq+cq^2$
1. Fall	g	u	$g+g+u=u$
2. Fall	u	g	$u+g+g=u$
3. Fall	u	u	$u+u+u=u$

Also ist in allen Fällen die linke Seite ungerade. Ein Widerspruch. Also können nicht alle drei Koeffizienten ungerade sein.
Bemerkung. Der Fall p und q gerade ist ausgeschlossen, da $ggT(p,\, q)=1$ vorausgesetzt ist.

Aufgabe 11.

Das Paar $(2;\, 1)$ ist Lösung der Gleichung $x^2-3y^2=1$ in den ganzen Zahlen. Durch Probieren kommt man vielleicht noch auf $(7;\, 4)$.
Die gegebene Gleichung nennt man eine Pellsche Gleichung. Es handelt sich um eine quadratische Gleichung in zwei Variablen, deren ganzzahlige Lösungen gesucht sind. Dazu gibt es Theorie. Wir begnügen uns damit, zu zeigen, dass diese spezielle Gleichung unendlich viele Lösungen hat.
Dazu verwenden wir die elementare Zerlegung $a^2-b^2=(a-b)\cot(a+b)$, also

$$x^2-3y^2=(x-\sqrt{3}y)\cdot(x+\sqrt{3}y)$$

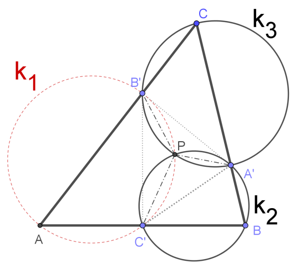
Leider müssen wir eine auftretende Wurzel in Kauf nehmen. Wir formen die Gleichung weiter um

$$\begin{aligned} (x-\sqrt{3}y)\cdot(x+\sqrt{3}y) &= 1 \quad |^2 \\ (x-\sqrt{3}y)^2\cdot(x+\sqrt{3}y)^2 &= 1^2 = 1 \\ \iff \quad (x^2+3y^2-2\sqrt{3}\cdot xy)\cdot(x^2+3y^2+2\sqrt{3}\cdot xy) &= 1 \end{aligned}$$

Verwendet man die gegebene Lösung für $(x;\, y)$, so erhält man $(7-4\sqrt{3})\cdot(7+4\sqrt{3})=1$, bzw. $7^2-3\cdot 4^2=1$. Demnach ist auch das Paar $(7;\, 4)$ Lösung der Gleichung.
Hätte man die gegebene Gleichung nicht zur zweiten Potenz, sondern zur n-ten Potenz erhoben, so hätten wir für jedes n eine Gleichung der Form $(A-B\sqrt{3})\cdot(A+B\sqrt{3})=1$ erhalten mit dem Lösungspaar $(A;\, B)$.
Wir erhalten also für jede natürliche Zahle n eine Lösung und somit gibt es unendlich viele ganzzahlige Lösungspaare.
Führe diese Methode für $n=3$ selbst durch!

Aufgabe 12.

Sei P jener Schnittpunkt von k_2 und k_3, der nicht auf BC liegt. Wir wollen zeigen, dass P, so wie auch in der Abbildung rechts dargestellt, in jedem Fall auch auf k_1 liegen muss.
Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks ABC in A, B, und C mit α, β und γ.
Nach dem Peripheriewinkelsatz (in k_2 über Sehne $C'A'$) gilt $\angle C'PA' = 180° - \beta$.



Ebenso gilt nach Peripheriewinkelsatz (in k_3 über Sehne $A'B'$), dass $\angle A'PB' = 180° - \gamma$.
Somit gilt

$$\angle C'PB' = 360° - (180° - \beta + 180° - \gamma) = \beta + \gamma.$$

Da $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, liegt somit P nach Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf dem Bogen $B'C'$ von k_1, der A nicht enthält.
Also schneiden einander die drei Kreise in P.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [3, S. 40/E 1], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [4, S. 177], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 6.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Tam

Aufgabe 7.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Tam

Aufgabe 8.

Aufgabe 561244 der Deutschen Mathematik-Olympiade[1] (56. Deutsche Mathematik-Olympiade 2016/2017, Klassenstufe 12, 4. Runde[Bundesrunde] Aufgabe 4.), bearbeitet von Josef Pech und vom MmF-Team

Aufgabe 9.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 10.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 11.

von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 12.

aus [2, S. 50], übersetzt von Josef Pech, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Archivierte Aufgaben der Deutschen Matheamtik-Olympiade. `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/aufgaben/aufgabenarchiv`. (aufgerufen am 12.05.2020).

[2] Titu Andreescu. *Mathematical Olympiad Treasures*. Birkhäuser, 2006.

[3] Arthur Engel. *Problem-solving strategies (Problem Books in Mathematics)*. Springer, 1998.

[4] Jiri Herman, Radan Kučera, Radan Kucera, Jaromír Šimša, and Jaromir Simsa. *Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2000.