

Österreichische Mathematikolympiade
Steirischer Unterstufenwettbewerb 2019
(Teil II, Arbeitszeit 105 Minuten)



Schreibe die Lösungen für jedes Beispiel auf ein eigenes Reinschriftblatt (Beschriftung mit Namen!). Für jedes vollständig gelöste Beispiel gibt es 5 Punkte. Wenn du ein Beispiel nicht bearbeitest, gib trotzdem ein leeres Blatt (beschriftet mit Beispielnummer und deinem Namen) ab.

Vergiss nicht darauf, deine Lösungswege möglichst sorgfältig aufzuschreiben / zu begründen (keine Kopfrechnungen!).

1) Es sei ABCD ein gleichschenkeliges Trapez mit $AB \parallel CD$; $AD = BC = b$ und $AB = a$. Die Winkelsymmetrale w_α von $\alpha = \sphericalangle DAB$ gehe durch den Punkt C. Sei E der Mittelpunkt der Seite AB und F der Schnittpunkt von w_α mit DE. Der Winkel $\sphericalangle DEA$ ist gleich groß wie $\sphericalangle DAB = \alpha$. Bestimme die Innenwinkel des Trapez und zeige, dass $CD = b$ und $EF = \frac{b}{2}$ gilt.

2) Bestimme alle ganzen Zahlen für die $(2x+7)(x-1)(3x-20)(x-9) < 0$ gilt und begründe, warum es keine weiteren Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

3) Sieben kongruente Rechtecke bestimmen wie im Bild ein größeres Rechteck mit dem Umfang 234 cm. Bestimme die Fläche des großen Rechtecks.

4) a) Wie lautet die kleinste Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 5, 6, und 8 teilbar ist?

b) Wie lautet die kleinste Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 5, 6, 8 und 9 teilbar ist?

c) Wie lautet die kleinste Zahl, die alle Ziffern von 0 bis 9 enthält und durch 5, 6, 8 und 9 teilbar ist?

5) Ein Rechteck wird in 6 Quadrate zerlegt (siehe Bild rechts). Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks, wenn bekannt ist, dass das dunkel markierte Quadrat einen Flächeninhalt von 16 cm^2 hat.

6) Zwei kleine Bengel, Peter und Paul, zerreißen die Schulordnung. Peter zerreißt ein Stück Papier immer in drei Teile, und Paul zerreißt ein Stück immer in fünf Teile.

a) Kurz nachdem sie mit ihrer Schandtät begonnen haben, liegen 15 Stück Papier vor ihnen. Peter hat mit dem Zerreißen begonnen, und Paul hat als letzter ein Stück zerrissen. Wie oft hat sich Paul bisher an der Aktion beteiligt? Bestimme alle möglichen Antworten und begründe, warum es sich dabei um alle Möglichkeiten handelt.

b) Als die Direktorin den zwei Lausbuben auf die Schliche kommt, verlangt sie, alle Fetzen einzusammeln und die Schulordnung wiederherzustellen. Peter und Paul finden insgesamt 100 Papierfetzen. Zeige, dass die aus diesen Teilen zusammengeklebte Schulordnung unvollständig bleiben muss.

7) Eine natürliche Zahl heißt aufteilbar, wenn die Summe einiger Ziffern dieser Zahl gleich der Summe ihrer restlichen Ziffern ist. So gilt, zum Beispiel

- 243601 ist aufteilbar, weil $2 + 6 + 0 = 4 + 3 + 1$
- 3272 ist aufteilbar, weil $3 + 2 + 2 = 7$
- 219 ist nicht aufteilbar, weil 9 in einer Summe vorkommen muss, und $2 + 1 < 9$ gilt.

a) Zeige, dass die Zahl 12 345 678 910 aufteilbar ist.

b) Begründe, warum die Ziffernsumme einer aufteilbaren Zahl immer gerade ist.

c) Die Zahl 2 474 924 ist aufteilbar. Wie kann man die Ziffern in zwei Gruppen mit gleichen Summen aufteilen? Begründe, warum es für diese Zahl nur eine Möglichkeit geben kann, um dies zu tun.

