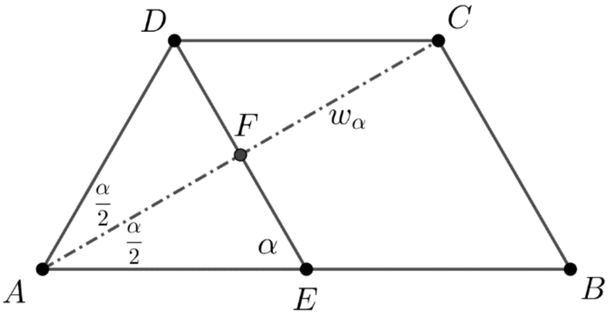
Österreichische Mathematikolympiade
Steirischer Unterstufenwettbewerb 2019
Teil II, Lösungen *(mit Vorschlag für Punkteverteilung)*



1) Da AB und CD parallel sind und AC die Winkelsymmetrale von ∠ DAB ist, gilt $\frac{\alpha}{2}$ = ∠DAC = ∠BAC = ∠ACD. Das Dreieck DAC ist somit gleichschenkelig und es gilt DC = DA = b. Da ∠DAE = ∠DEA = α gilt, ist das Dreieck AED gleichschenkelig mit DE = DA = b, und da auch ∠CBA = α gilt, ist BCDE ein Rhombus, und es gilt auch EB = CD = ED = b. Da auch BE = AE gilt, sehen wir, dass AED sogar gleichseitig ist, und der Schnittpunkt F von w_α mit ED halbiert somit ED, wie behauptet. Da AED gleichseitig ist, gilt α = 60°, und die Innenwinkel in ABCD sind daher 60° und 120°.
(Angabe des gleichschenkeligen Dreiecks ACD 1P; Argument für Rhombus BCDE 2P; abschließendes Argument für F als Mittelpunkt von DE 1P; Winkel aus gleichseitigem Dreieck AED abgeleitet 1P.)

2) Damit das Produkt von vier Faktoren negativ sein kann, müssen 3 positiv und einer negativ sein, oder umgekehrt. Die Nullstellen der vier Faktoren sind $-\frac{7}{2}$, 1, $\frac{20}{3}$ und 9, und die ganzen Zahlen mit der gewünschten Eigenschaft sind daher diejenigen zwischen $-\frac{7}{2}$ und 1, sowie jene zwischen $\frac{20}{3}$ und 9. Die Menge aller Lösungen ist also {-3, -2, -1, 0, 7, 8}
(Angabe mindestens einer Lösung durch Probieren 1P; Angabe der vollständigen Lösungsmenge ganz ohne Argument 3P; Argument, dass eine ungerade Anzahl von Faktoren negativ sein muss +1P, Bestimmen der Grenzen +1P.)

3) Es sei x die kleinere Rechtecksseitenlänge und y die größere. Es gilt 2y = 3x. Für den Umfang des Rechtecks gilt somit 6y + 4x = 9x + 4x = 13x = 234, und wir erhalten x = 18 und somit y = 27. Die gesuchte Fläche des Rechtecks beträgt somit 54 x 63 = 4302 cm².
(Zahlen 18 und 27 finden durch Probieren 2P; dann richtige Antwort aber ohne schlüssiges Argument + 1P; algebraischer Ansatz oder ähnliches 1 P; Gleichung aufstellen +2P; x,y berechnen +1P; fertigstellen +1P; alle Ideen richtig aber mit Rechenfehlern bis zu 4P möglich)

4) a) kgV(5,6,8) = 120.
b) kgV(5,6,8,9) = 360.
c) Da die Summe aller Ziffern von 0 bis 9 gleich 45 ist, ist jede derartige Zahl durch 9 teilbar. Damit sie durch 5 und 2 teilbar sein kann, muss 0 die letzte Ziffer sein. Die kleinste derartige Zahl, die also durch 2, 5 und 9 teilbar ist (und somit auch durch 6), ist 1234567890. Nun ist diese Zahl aber nicht durch 8 teilbar; man muss die Ziffern so umstellen, dass die 3-ziffrige Zahl am Ende durch 8 teilbar ist. Dies gelingt mit keiner Kombination von 7, 8 und 9 vor der 0, und die kleinste Zahl mit der gewünschten Eigenschaft ist somit 1234578960.
(a) 1P; b) 1P; c) 0 am Ende 1P; Lösung +2P)

5) Die Seitenlänge des grauen Quadrats ist 4 cm, und die der kleinen Quadrate jeweils somit 2cm. Die drei größeren Quadrate haben somit die Seitenlängen $2 + 4 = 6$, $6 + 4 = 10$ und $10 + 6 = 16$. Die Fläche des Rechtecks ist also $4^2 + 2^2 + 2^2 + 6^2 + 10^2 + 16^2 = 416$ cm²
(Seitenlänge der kleinen Quadrate 2P; Seitenlängen der drei großen Quadrate +2P; Flächenberechnung +1P)

6) a) Immer wenn Peter reißt, vergrößert sich die Anzahl von Stücken um 2 und immer wenn Paul reißt um 4. Von 1 auf 15 hat sich die Zahl um 14 vergrößert. Wenn Peter x Mal reißt und Paul y Mal, so gilt $x, y > 0$ und $2x + 4y = 14$. Das ist nur möglich für $x = 5$, $y = 1$ oder $x = 3$, $y = 2$ oder $x = 1$, $y = 3$.
b) Da bei jedem Reißvorgang eine gerade Anzahl von Stücken dazukommt, muss es immer eine ungerade Anzahl von Teilen geben. Wenn genau 100 Stücke vorliegen, muss also mindestens ein Stück fehlen.
(a) 1/2/3 Lösungen ohne Argument angeben 1P; Ansatz eines Arguments mit guter Idee +1P; Teil a) vollständig argumentiert gesamt 3P; b) Paritätsargument 2P)

7) a) Es gilt $6 + 8 + 9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 1 + 0 = 23$.
b) Die Gesamtziffernsumme ist gleich der Summe der beiden Teilziffernsummen, die aber gleich sind. Sie ist also genau doppelt so groß wie die Ziffernsumme eines Teils, und somit gerade.
c) $2 + 4 + 7 + 4 + 9 + 2 + 4 = 32$. Die Hälfte davon ist 16, und die einzige Möglichkeit die ungerade Zahl 9 mit anderen dieser Ziffern zur geraden Summe 16 zu ergänzen ist mit der einzig verbleibenden ungeraden Zahl 7. Da schon $9 + 7 = 16$ gilt, ist die einzige Aufteilung $9 + 7 = 2 + 4 + 4 + 2 + 4$.
(a) 1P; b)1P; c) Angabe der Aufteilung ohne Argument 1P; Paritätsargument +1P; vollständiges Argument +1P)