51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 27. September/ 04. Oktober 2019

1. I. Finde die letzte Ziffer der Zahl a) 6^{2019}; b) 9^{2019}; c) 2^{2019}; d) 3^{2019}.

   II. Löse die gleiche Aufgabe, wenn der Exponent jeweils 2020 ist.

   III. Löse die gleiche Aufgabe im allgemeinen Fall, wenn der Exponent $n \in \mathbb{N}$.

2. In der Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl A kommt hundert mal die Ziffer Null, hundert mal die Ziffer Eins und hundert mal die Ziffer Zwei vor. Die anderen Ziffern kommen nicht vor. Kann A eine Quadratzahl sein?

3. Sei $u \in \mathbb{N}$. Wieviele Tripel (x, y, z) mit x, y, $z \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ erfüllen die Gleichung

$$x + y + z = 3u.$$

4. a) Finde drei natürliche Zahlen, die folgende Gleichung erfüllen: $28x + 30y + 31z = 365$.

   b) Finde drei natürliche Zahlen, die folgende Gleichung erfüllen: $x + 4y + 7z = 366$.

5. a) Beweise, dass das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen eine gerade Zahl ist.

   b) Beweise, dass das Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen durch drei teilbar ist.

   c) Erweitere diese Aufgabe auf n aufeinanderfolgende Zahlen.

6. Beweise, dass das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen durch 8 teilbar ist.

7. Ist die Summe $1 + 2 + \cdots + 2019$ durch 2019 teilbar?

8. Auf einem Blatt Papier sind sechs Punkte gegeben, die so platziert sind, dass keiner der Punkte auf einer Geraden mit zwei anderen Punkten liegt. Man verbindet diese Punkte mit einem grünen oder einem roten Stift. Zwei Spieler A und B machen das nacheinander und dürfen beide Farben benutzen. A will, dass auf der Ebene ein rotes oder ein grünes Dreieck erscheint. B will das vermeiden. Beweise, dass B immer verliert.

9. a) Gegeben ist ein Dreieck, dessen Seitenlängen drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen (größer als 2) sind. Beweise, dass die Höhe, die normal auf die mittlere Seite steht, diese Seite in zwei Abschnitte teilt, deren Differenz gleich 4 ist.

   b) Erweitere die Aufgabe auf den Fall dreier aufeinanderfolgender gerader Zahlen.

10. Gegeben sind fünf Strecken mit der Eigenschaft, dass jeweils drei von ihnen ein Dreieck bilden können. Beweise, dass mindestens eines dieser Dreiecke spitzwinklig ist. [1]

Literatur

[1] I. L. Babinskaja. *Aufgaben für matehmatische Olymiaden*. Nauka, 1975. vergriffen.