

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs "Mathematik macht Freu(n)de"

06. März 2020

Aus Aufgabenblatt 10:

1. Wir nennen eine Zahl „schön“, wenn sie genau vier positive Teiler hat. 2018 ist z.B. eine schöne Zahl, weil sie die Teiler 1, 2, 1009 und 2018 hat. Wir nennen eine schöne Zahl „besonders schön“, wenn die Summe ihrer vier Teiler eine ungerade Zahl ist.
 - (a) Man bestimme alle besonders schönen Zahlen.
 - (b) 2018 und 2019 sind zwei aufeinanderfolgende schöne Zahlen. Gibt es auch mehr als zwei aufeinander folgende schöne Zahlen? Wie viele höchstens?
2. Unter dem Big Brother einer natürlichen Zahl n verstehen wir jene Zahl, die man erhält, wenn man die Ziffern von n der Größe nach geordnet (beginnend mit der größten) anschreibt. Big Brother von 2019 ist also 9210. Man beweise, dass die Differenz einer Zahl und ihres Big Brothers immer durch 9 teilbar ist.
3. Unter einer Palindromzahl versteht man eine natürliche Zahl, die im dekadischen System geschrieben von vorne und von hinten gelesen den gleichen Wert hat. Zum Beispiel ist 5885 eine vierstellige Palindromzahl. Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller vierstelligen Palindromzahlen.

Neue Aufgaben:

4. Inna ist 24 Jahre älter als ihre Tochter. Vor vier Jahren war sie doppelt so alt wie damals ihre Tochter. Wie alt ist Inna, wie alt ist ihre Tochter?
5. (Aus der Geschichte der Physik.)

König Hieron II. von Syrakus erteilte einem Goldschmied den Auftrag, eine Krone aus purem Gold herzustellen. Das dazu nötige Gold erhielt der Goldschmied von seinem

König. Obwohl dem König die künstlerische Gestaltung der Krone gefiel, plagten ihn doch Zweifel, ob die Krone wirklich aus reinem Gold bestehe. Deshalb beauftragte er Archimedes, eine Methode zu ersinnen, mit der man dies entscheiden kann, ohne die Krone zu beschädigen. Die von dem römischen Baumeister Vitruv überlieferte Legende berichtet, dass Archimedes der entscheidende Gedanke im Bad gekommen sei, nämlich als er, Archimedes, in der Badewanne untertauchte und bemerkte, dass Wasser über den Wannenrand floss. Er habe sich über seinen Einfall so gefreut, dass er, nackt und nass wie er war, durch die Straßen von Syrakus gelaufen sei, unterwegs laut heureka, heureka (ich hab's gefunden) rufend.

Bleibt die Waage, deren Balken die Königskrone und einen Körper aus reinem Gold tragen (B 45a), auch dann im Gleichgewicht, wenn man die Krone und den Körper aus Gold in Wasser bringt, so stimmen auch die beiden Auftriebskräfte und damit die Dichten überein. Enthält die Krone jedoch Silber, was tatsächlich zutraf, dann erfährt sie <... > eine größere Auftriebskraft (B 45b).

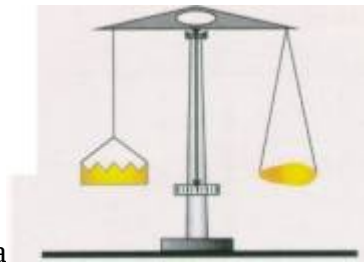


Bild a



Bild b

[Quelle: K. Hammer, H. Knauth, S. Kühnel:

Physik 8, 1992. ISBN: 3486875604]

Die aus Gold und Silber gefertigte Krone wog ca. 9 Kilo, unter Wasser getaucht ca. 8,5 Kilo. Wir bedenken, dass Gold ca. 5% und Silber ca. 10% seines Gewichts unter Wasser verliert. Wie viel Gold und Silber enthielt die Krone?

6. Peter und Marina machen einen Ausflug mit einem Ruderboot und rudern gegen den Lauf der Donau. In der Nähe der Nordbrücke hat Marina ihren Hut verloren und das erst 10 Minuten später bemerkt. Peter wollte den Hut suchen, hat das Boot umgedreht und den Hut an der Brigittenauer Brücke eingeholt. Berechne, wie groß der Abstand zwischen der Nordbrücke und der Brigittenauer Brücke ist, wenn die Donau mit einer Geschwindigkeit von ca. 6 km/h fließt.