51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 17. April 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Levi Haunschmid zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

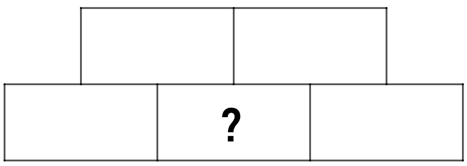
Am 14. April 2020 wird das Aufgabenblatt um Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Levi Haunschmid bespricht mit euch die Aufgaben im virtuellen Olympiade-Kurs am 17. April 2020 von 14:00–15:30 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Dokument um ausgewählte Lösungsvorschläge und Quellenangaben.

Schreibe uns gerne, wenn du an unserem virtuellen Olympiade-Kurs teilnehmen möchtest. Du bist jederzeit herzlich willkommen.

Aufgaben

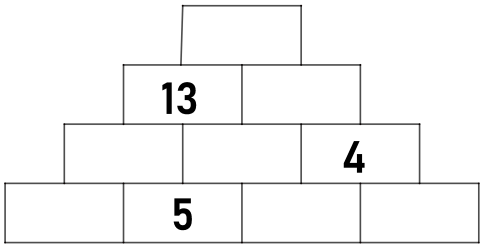
Ich habe mir für diese Woche vier Aufgaben im „Känguru“-Stil ausgedacht. Das heißt insbesondere, dass bei den Aufgaben kein Beweis sondern eine Lösung gefragt ist. Trotzdem ist es glaube ich auch hier sehr sinnvoll darüber nachzudenken, ob du weißt, dass die gefundene Lösung auch sicher die einzige ist, und wie man ein Argument dafür aufschreiben könnte.
Ich hoffe ihr habt viel Spaß mit den Aufgaben, Levi

Aufgabe 1.
Ivan hat fünf Bausteine, die mit den Zahlen von 1 bis 5 beschriftet sind. Er stapelt sie wie in der Skizze zu sehen ist:



Dabei liegt auf zwei in einer Ebene nebeneinanderliegenden Steinen immer der Stein, der mit der Summe der Werte der beiden Steine beschriftet ist. Welche Werte kann der mit „?“ markierte Stein haben?

Aufgabe 2. Jetzt hat Ivan mehr Bausteine und stapelt sie wieder zu einer Pyramide:



Wieder liegt auf zwei Steinen jeweils der mit der Summe beschriftete Stein. Bei drei Steinen weißt du schon welchen Wert sie haben.
Welcher Stein liegt ganz oben?

Aufgabe 3. Irina hat drei Dominosteine: Einer hat auf dem einen Ende eine 1 und auf dem anderen eine 2, der zweite eine 2 und eine 3 und der dritte eine 3 und eine 4. Sie legt diese Steine nach folgenden Regeln auf:

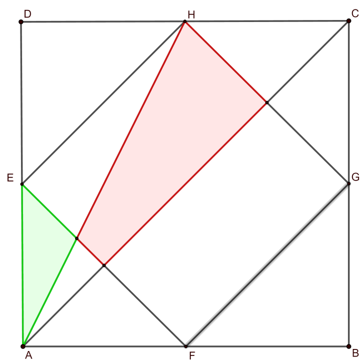
(i) Zwei Dominosteine berühren sich bei maximal einer Kante.

(ii) Berühren sich zwei Dominosteine so haben sie im Feld, das zur berührenden Kante gehört jeweils die gleiche Zahl.

(iii) Jeder Dominostein berührt mindestens einen anderen Dominostein.

Sie legt den Stein mit 1 und 2 vor sich.
Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt die anderen beiden Steine dazu zu legen, sodass die Regeln erfüllt sind?

Aufgabe 4. Das Quadrat ABCD hat Fläche 1. Die Punkte E, F, G und H sind jeweils die Mittelpunkte von DA, AB, BC und CD. Berechne die Differenz der Flächeninhalte der roten Fläche und der grünen Fläche!



Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Hier ist es wichtig strukturiert zu arbeiten. Unter anderem kann es helfen manche Felder mit Variablen zu bezeichnen. Auch kann es helfen gewisse Teilaufgaben zu lösen: z.B. Wie kann 4 als Summe von zwei verschiedenen positiven ganzen Zahlen geschrieben werden?

Aufgabe 2. Siehe Hinweis zur **Aufgabe 1** .

Aufgabe 3. Bei dieser Aufgabe ist es vor allem wichtig, sicher zu sein, die Angabe richtig verstanden zu haben. Überlegt euch zuerst einige Beispiele, welche Konfigurationen an Dominos erlaubt sind und welche nicht. Dann ist es wichtig alle Möglichkeiten strukturiert zu zählen. Hier hilft eine systematische Fallunterscheidung sehr (Fall 1: Der 2-3 Stein liegt so; Fall 2: der 2-3 Stein liegt so ...)

Aufgabe 4. Hier hilft es über die Fläche von Formen, die sich überlappen, nachzudenken: Wenn ein Viereck Fläche A hat und ein Dreieck Fläche B und sie sich in einer Figur von Fläche C überschneiden, dann ist die Fläche der Figur, die von beiden überdeckt wird $A + B - C$.
Versuche außerdem verschieden Flächen mit Variablen zu bezeichnen und Gleichungen zwischen diesen Flächen zu finden.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Levi Haunschmid, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Möglich sind die Zahlen 1 und 3.
Dass diese beiden Zahlen möglich sind sieht man, indem man die unteren drei Steine mit den Werten 2, 1, 4 beziehungsweise 1, 3, 2 beschriftet und oben die dazugehörigen Summen (3 und 5 bzw. 4 und 5).
Die Zahl 5 kann nicht in der unteren Reihe stehen, da darüber dann eine größere Zahl stehen müsste.
Bezeichnet man die Werte in der untersten Reihe mit x, y und z, dann erhält man für die Summe aller fünf Zahlen

$$2x + 3y + 2z = 15$$

. Also kann die Zahl unten in der Mitte nicht gerade sein, also insbesondere nicht 2 oder 4.
Alternative Lösung: Wäre eine gerade Zahl in der Mitte, dann hätten die beiden Zahlen links davon (links unten und links oben) und die beiden Zahlen rechts davon (rechts unten und rechts oben) die gleiche Parität, also gäbe es eine gerade Anzahl an ungeraden Zahlen. Wir haben aber drei ungerade Zahlen: 1, 3 und 5.

Aufgabe 2.

Der Wert des obersten Steines ist 23.
Unter der 4 können nur die Zahlen 1 und 3 stehen. Würde die 3 links stehen, dann wäre die 13 nicht mehr möglich, da alle Zahlen positiv und eindeutig sein müssen und also über der 5 zwei Zahlen stehen, die mindestens 6 aber auch maximal 7 sind.
Also steht unter der 4 links eine 1 und damit links über der 1 noch eine 6 und darüber rechts eine 10 und ganz oben somit 23.

Aufgabe 3.

Bei dieser Aufgabe ist sorgsames Abzählen von Nöten:
Für den zweiten Stein gibt es mehrere Möglichkeiten:

Fall 1) Der zweite Stein liegt vertikal über dem ersten: dann gibt es 7 Möglichkeiten für den dritten: drei vertikal, zwei horizontal nach links schauend und zwei horizontal rechts schauend.

Fall 2) Der zweite Stein liegt horizontal über dem ersten: Hier gibt es nur 5 Möglichkeiten für den dritten: drei vertikal und zwei horizontale.

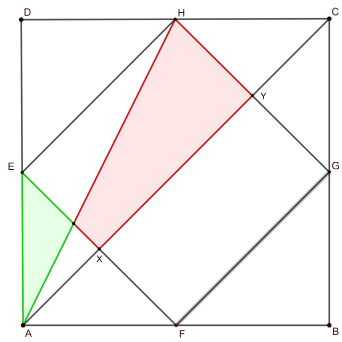
Fall 3) Der zweite Stein liegt vertikal rechts neben dem ersten: Hier gibt es wieder 5 Möglichkeiten, wie beim vorherigen Fall.

Fall 4) Der zweite Stein liegt horizontal rechts neben dem ersten: Hier gibt es wieder 7 Möglichkeiten, wie beim ersten Fall.

Es gibt noch drei weiter Fälle, bei denen der zweite Stein teilweise unter dem ersten liegt, diese entsprechen jedoch den ersten drei Fällen von oben.
Damit ergeben sich: $2 \cdot (7 + 5 + 5) + 7 = 41$ Möglichkeiten für die Position der drei Steine.

Aufgabe 4.

Bezeichne den Schnittpunkt von AC und GH als Y und den Schnittpunkt von AC mit EF als X. Die Differenz der roten und der grünen Fläche ist die Differenz der Fläche von AYH und der Fläche von AXE. Das Dreieck AYH hat die gleiche Fläche wie das Dreieck AYE, da EH und AY parallel sind. Also ist die Differenz der beiden Flächen gleich der Fläche des Dreiecks XEY.



Dieses Dreieck ist die Hälfte des Rechtecks XYHE, das wiederum die Hälfte des Quadrats EFGH ist, das die Hälfte des Quadrats ABCD ist.
Also ist die gesuchte Fläche 1/8.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

von Levi Haunschmid, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

von Levi Haunschmid, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

von Levi Haunschmid, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

von Levi Haunschmid, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur