51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Unterstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 15. Mai 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Inna Roitberg zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 12. Mai 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Levi Haunschmid bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 15. Mai 2020 von 14:00–15:30 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns,wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Radioaktive Kugeln

Aufgabe 1. In zwei Kisten liegen 5 und 6 Kugeln, eine von jeder Kiste ist radioaktiv. Mithilfe eines Strahlungsdetektors kann man herausfinden, ob eine Kugel oder eine Gruppe von Kugeln radioaktiv ist. Finde beide radioaktiven Kugeln mit fünf Messungen.

Aufgabe 2. Gegeben sind 30 Kugeln, 5 davon sind radioaktiv. Mithilfe eines Messgeräts kann man herausfinden, wie viele radioaktive Kugeln die getestete Gruppe enthält (man kann das Messgerät auf eine oder auf mehrere Kugeln gleichzeitig anwenden).
Finde mit drei Messungen 5 saubere (nicht-radioaktive) Kugeln.

Schubfachschluss

Wir beginnen zunächst mit einem kleinen Theorieabschnitt, bevor Aufgaben zum Schubfachschluss folgen.

Satz 1 (Schubfachprinzip)**.** Falls man n Objekte auf m Mengen (n, $m > 0$) verteilt und n größer als m ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt ist.

Satz 2 (Schubfachprinzip (bildhafte Vorstellung dieses Vorgangs))**.** Gegeben seien m „Schubfächer“ und n „Gegenstände“, die auf diese Fächer verteilt werden sollen mit $n > m > 0$. Dann gibt es ein Fach, in dem mindestens zwei Gegenstände liegen.

Beweis. Der Beweis dieses Prinzips kann indirekt geführt werden: Falls das Prinzip nicht stimmt, dann liegt in jedem der m Schubfächer höchstens ein Gegenstand. Damit gibt es höchstens m Gegenstände. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung $n > m$. □

Satz 3 (Schubfachprinzip (allgemeine Form))**.** Falls man $m \cdot k+1$ Objekte auf m Mengen (m, $k > 0$) verteilt, dann gibt es eine Menge, in der mindestens $k+1$ Objekte sind.

Aufgabe 3. Es gibt 37 Kartoffelsäcke auf Lager, mit Kartoffeln, die zu einer von vier Sorten gehören. Alle Kartoffeln aus dem gleichen Sack sind auch von der gleichen Sorte. Ein Restaurant hat neun Säcke einer Sorte bestellt.
Ist es sicher möglich, diesen Auftrag zu erfüllen?
Bemerkung: Um welche Sorte es sich handelt ist dem Restaurant nicht wichtig.

Aufgabe 4. Auf einem Blatt Papier sind sechs Punkte gegeben, die so platziert sind, dass keiner der Punkte auf einer Geraden mit zwei anderen Punkten liegt. Man verbindet diese Punkte mit einem grünen oder einem roten Stift. Zwei Spieler A und B machen das nacheinander und dürfen beide Farben benutzen. A will, dass auf der Ebene ein rotes oder ein grünes Dreieck erscheint. B will das vermeiden.
Beweise, dass B immer verliert.

Aufgabe 5. Beweise folgende Aussagen:

a) Unter 10 beliebigen ganzen Zahlen existieren zwei, deren Differenz durch neun teilbar ist.

b) Unter n beliebigen ganzen Zahlen existieren einige (oder vielleicht eine), deren Summe durch n teilbar ist.

c) Man wirft 51 Punkte in ein Einheitsquadrat (ein Quadrat mit Seitenlängen eins). Es gibt einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{7}$, der drei dieser Punkte enthält.

Aufgabe 6. Beweise, dass es eine Zahl gibt, die die Form

$$20192019\ldots201900\ldots0,$$

hat und durch 2020 teilbar ist.
Bemerkung: Die Zahl soll aus einigen Wiederholungen der Ziffernfolge 2, 0, 1 und 9 bestehen, gefolgt von einigen Nullen.

Aufgabe 7. Kann man

a) zwei Primzahlen finden, bei denen die letzten drei Ziffern übereinstimmen?

b) mehrere Primzahlen finden, bei denen die letzten drei Ziffern übereinstimmen?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Wir nummerieren die Kugeln so, dass die Kugeln $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in der ersten Kiste sind und die Kugeln $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ in der zweiten. Wir fangen mit den Kugeln $\{1, 6, 7\}$ an. Wenn diese Messung negativ ist, bleiben in jeder Kiste vier Kugeln $\{2, 3, 4, 5\}$ und $\{8, 9, 10, 11\}$, und wir können die Aufgabe 1(c) aus dem letzten Aufgabenblatt benutzen. Andernfalls kann man die Kugeln $\{1, 8, 9\}$ für die nächste Messung verwenden und die Ergebnisse analysieren.

Aufgabe 2: Wir teilen alle Kugeln in drei Gruppen mit je 10 Kugeln auf und überlegen, wie sich die fünf radioaktiven Kugeln auf diese drei Gruppen aufteilen. Nach der ersten Messung entscheiden wir, welche der drei Gruppen wir für die weiteren Messungen verwenden.

Aufgabe 3: Die vier Sorten entsprechen vier Schubfächern. Wir benutzen das Schubfachprinzip für vier Schubfächer und 37 Säcke.

Aufgabe 4: Überlege, wie viele Strecken von einem Punkt ausgehen und benutze das Schubfachprinzip für diese Strecken und zwei Farben (Schubfächer).

Aufgabe 5:

a) Den zehn ganzen Zahlen entsprechen zehn Reste bei Division durch 9 . Gibt es Übereinstimmungen unter diesen Resten? Wenn ja, wie können wir das benutzen?

b) Wir bezeichnen diese Zahlen mit $a_1, a_2, \dots a_n$, und betrachten die n Summen
a_1,
$a_1 + a_2$,
$a_1 + a_2 + a_3$,
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,
Überlege, ob mehrere dieser Zahlen denselben Rest bei Division durch n haben (müssen), und wie wir das benutzen können.

c) Wir teilen das Einheitsquadrat in 25 Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{5}$ und betrachten sie als „Schubfächer“ für 51 Punkte.

Aufgabe 6: Wir betrachten 2020 Zahlen der Form
$2019, 20192019, 201920192019, \dots, \quad \underbrace{201920192019\dots2019}_{\text{Ziffern 2,0,1,9 wiederholen sich 2020 mal}},$ und überlegen, ob mehrere davon denselben Rest bei Division durch 2020 haben.

Aufgabe 7: Es ist hilfreich, die Reste bei Division durch 1000 zu betrachten.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Wir nummerieren die Kugeln so, dass die Kugeln $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in der ersten Kiste sind und die Kugeln $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ in der zweiten.
Wir verwenden für die k-te Messung, wenn sie die Kugeln i und j beinhaltet, die Schreibweise $M_k\{i, j\}$. Wird bei einer Messung Radioaktivität festgestellt, so legen wir dafür den Wert von $M_k\{i, j\}$ als 1 fest, ansonsten den Wert 0. (Eine Messung kann natürlich auch nur eine oder auch mehr als zwei Kugeln umfassen.
Wir fangen mit den Kugeln $\{1, 6, 7\}$ an. Wenn diese Messung negativ ist, bleiben in den Kisten je vier Kugeln $\{2, 3, 4, 5\}$ und $\{8, 9, 10, 11\}$, und wir können die Aufgabe 1 c.) aus dem letzten Aufgabenblatt benutzen und mit 2 Messungen in jeder Kiste eine radioaktive Kugel finden. Andernfalls kann man die Kugeln $\{1, 8, 9\}$ für die nächste Messung verwenden und die Ergebnisse analysieren:

$$M_2\{1, 8, 9\} = \begin{cases} 0 \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} \text{Mit zwei Messungen finden wir eine radioaktive Kugel} \\ \text{in der Menge } \{2, 3, 4, 5\}\text{und mit der letzten Messung} \\ \text{eine radioaktive Kugel in der Menge } \{6, 7\} \\ \text{(siehe Aufgaben 1 a.) und 1 c.) vom letzten Aufgabenblatt)} \end{array} \right. \\ \\ 1 \Rightarrow & \left| \begin{array}{l} \text{Kugel 1 ist radioaktiv. Die zweite radioaktive Kugel finden} \\ \text{wir mit drei Messungen in der Menge } \{6, 7, 8, 9, 10, 11\} \\ \text{(siehe Aufgabe 1 d.) vom letzten Aufgabenblatt).} \end{array} \right. \end{cases}$$

Aufgabe 2.

Wir teilen alle Kugeln in drei Gruppen mit je 10 Kugeln auf und überlegen, wie sich die fünf radioaktiven Kugeln auf diese drei Gruppen aufteilen: *mindestens eine dieser drei Gruppen enthält entweder keine oder nur eine radioaktive Kugel.*
Wir messen die erste Zehner-Gruppe. Wenn das Messgerät null zeigt, haben wir schon fünf saubere Kugeln gefunden. Wenn das Gerät 1 zeigt, messen wir beliebige fünf Kugeln aus dieser Gruppe. Wenn sie sauber sind, sind sie die gesuchten Kugeln. Andernfalls sind die anderen fünf Kugeln sauber.
Wenn das Messgerät bei der ersten Messung mehr als 1 aber weniger als 5 zeigt, nehmen wir die zweite Zehner-Gruppe und wiederholen unsere Überlegungen.
Wenn wir bei der ersten Messung den Wert 5 erhalten, sind alle Kugeln in den beiden anderen Gruppen sauber.

Aufgabe 3.

Wir benutzen das Schubfachprinzip für vier Sorten (Schubfächer) und 37 Säcke (Gegenstände). Wir erhalten bei Anwendung des Schubfachprinzips, dass es mindestens eine Sorte gibt, von der es $\frac{36}{4} + 1 = 10$ Säcke gibt, die nur Kartoffeln einer der vier Sorten enthalten.
Wäre dem Restaurant wichtig, um welche Sorte genau es sich handelt, könnte der Auftrag nicht mit Sicherheit erfüllt werden: es wäre nämlich möglich, dass ein Schubfach weniger als 9 Säcke enthält (z.B. gar keinen Sack) und sich die übrigen Säcke auf die drei anderen Schubfächer verteilen. D.h. dass es Sorten geben kann, von denen weniger als 9 Säcke vorhanden sind. Das Schubfachprinzip

stellt nur sicher, dass es mindestens ein Schubfach gibt, in dem sich mehr als 9 Säcke befinden.

Aufgabe 4.

Wir stellen fest, dass genau fünf Strecken von jedem Punkt ausgehen. Die beiden Farben entsprechen jeweils einem Schubfach. Laut des Schubfachprinzips, sind mindestens drei der fünf Strecken gleichfarbig. Wenn wir jetzt ihre drei Endpunkte verbinden, egal mit welchen Farben, erhalten wir ein gleichfarbiges Dreieck (entweder eine der Strecken hat die Farbe der zunächst betrachteten gleichfarbigen drei Strecken oder alle drei Strecken sind in der anderen Farbe).

Aufgabe 5.

a) Den zehn ganzen Zahlen entsprechen zehn Reste bei Division durch 9. Die neun möglichen Reste bei Division durch 9 (0, 1, . . . , 8) entsprechen neun Schubfächern. Deshalb befinden sich in mindestens einem der Schubfächer mindesten zwei Zahlen. Diese haben denselben Rest bei Division durch 9, somit ist ihre Differenz durch neun teilbar.

b) Wir bezeichnen diese Zahlen mit $a_1, a_2, \dots a_n$, und betrachten die n Summen
a_1,
$a_1 + a_2$,
$a_1 + a_2 + a_3$,
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
Ist eine davon durch n teilbar, dann die Aufgabe gelöst. Andernfalls können diese n Summen nur $n-1$ verschiedenen Reste bei Division durch n haben (da der Rest 0 nicht auftritt). Laut des Schubfachprinzips, haben mindestens zwei dieser Summen denselben Rest. Die Differenz dieser zwei Summen ist auch eine Summe und ist durch n teilbar.

c) Wir teilen das Einheitsquadrat in 25 Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{1}{5}$ und betrachten sie als „Schubfächer“ für 51 Punkte. Dann enthält mindestens eines dieser Quadrate zumindest 3 Punkte. Der Umkreis des Quadrates hat den Radius (Satz des Pythagoras)

$$r = \frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{\frac{1}{50}} < \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}.$$

und enthält mindestens drei der 51 Punkte.

Aufgabe 6.

Wir betrachten 2020 Zahlen der Form

$$2019, 20192019, 201920192019, \dots, \quad \underbrace{201920192019\dots2019,}_{\text{Ziffern 2,0,1,9 wiederholen sich 2020 mal}} \quad .$$

Offensichtlich sind diese Zahlen durch die gerade Zahl 2020 nicht teilbar (weil sie alle ungeraden Zahlen sind). Dann können sie nur 2019 verschiedenen Reste bei Division durch 2020 haben. Laut des Schubfachprinzips haben also mindestens zwei Zahlen denselben Rest. Die Differenz dieser zwei Zahlen hat die angegebene Form und ist durch 2020 teilbar.

Aufgabe 7.

a) Wir betrachten 1001 Primzahlen, die jeweils größer als 1000 sind. Sie können nur 1000 verschiedenen Reste bei Division durch 1000 annehmen. Deshalb haben mindestens zwei dieser Primzahlen denselben Rest und damit haben sie drei übereinstimmenden letzten Ziffern.

b) Wir zeigen, dass dies für jede Anzahl $n+1$ möglich ist. Betrachten wir $1000n+1$ Primzahlen und wenden das Schubfachprinzip wie bei obiger Teilaufgabe an, so erhalten wir, dass mindestens $n+1$ davon denselben Rest bei Division durch 1000 haben und somit in den letzten drei Ziffern übereinstimmen.

Bemerkung. Hier haben wir die bekannte Tatsache verwendet, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wir können also $1000n + 1$ paarweise verschiedene Primzahlen betrachten, egal wie groß wir n wählen.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 2.

[1], (UTJM XLV, 20.-26. Februar 2015, Kirow, Russland, S. Volchenkov und S. Berlov), übersetzt von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 3.

von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 4.

Siehe auch Aufgabenblatt 3, von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 5.

aus [2], übersetzt von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 6.

von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Aufgabe 7.

von Inna Roitberg, bearbeitet vom MmF-Team.

Literatur

[1] Uralien Turnier Junger Mathematiker (UTJM). `http://turmath.ru/uraltur/archive.php`. Russische Webseite (aufgerufen am 18.05.2020).

[2] I. L. Babinskaja. *Aufgaben für mathematische Olymiaden*. Nauka, 1975. vergriffen.