53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 25. September 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Stephan Wagner zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 23. September 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Stephan Wagner bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 25. September 2021 von 10:00–11:45 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Kombinatorische Spiele

Einführung

Kombinatorische Spiele können Spaß machen, wenn man sie spielt, bieten aber auch viel Raum für interessante mathematische Ideen. Ganze Bücher wie [1] sind dem Thema gewidmet, in denen tiefgehende mathematische Theorien entwickelt werden. Auch bei mathematischen Wettbewerben sind Spiele verschiedener Art beliebte Aufgaben.

Eine typische Strategie besteht im Ausnutzen von Symmetrien, wie etwa in den folgenden einfachen (und wohlbekannten) Beispielen:

Beispiel 1.

(a) Stephan und Theresia setzen abwechselnd Türme auf ein 8×8-Schachbrett, die sich dabei gegenseitig nicht bedrohen dürfen (also nicht in derselben waagrechten oder senkrechten Linie stehen). Stephan beginnt das Spiel. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. Wer von beiden hat eine Gewinnstrategie?

(b) Stephan und Theresia setzen abwechselnd Läufer auf ein 8×8-Schachbrett, die sich dabei gegenseitig nicht bedrohen dürfen (also nicht in derselben Diagonalen stehen). Stephan beginnt das Spiel. Wer nicht mehr ziehen kann, verliert. Wer von beiden hat eine Gewinnstrategie?

Im ersten Fall kann Theresia etwa dadurch gewinnen, dass sie jeden Zug Stephans am Mittelpunkt des Schachbretts spiegelt. Dadurch bleibt die Stellung stets symmetrisch. Wenn Stephans Zug legal war, dann muss dies somit auch für Theresia gelten. Gleiches funktioniert auch im zweiten Fall, allerdings durch Spiegeln entlang einer der beiden Mittellinien (horizontal oder vertikal). Im Grunde genommen braucht man für das Spiel mit den Türmen allerdings gar keine Strategie: Theresia gewinnt immer, unabhängig davon, was die beiden machen! Das liegt daran, dass jeder Zug genau eine horizontale und eine vertikale Linie eliminiert, sodass das Spiel immer nach genau acht Zügen (vier für Stephan, vier für Theresia) endet.

Eine andere wichtige Methode besteht im Auffinden von Gewinnpositionen.

Beispiel 2. Theresia und Stephan werden die Schachfiguren langweilig, und daher beginnen sie ein neues Spiel: beginnend mit der Zahl 2021 subtrahieren die beiden abwechselnd eine einstellige positive ganze Zahl. Wer 0 erreicht, gewinnt. Diesmal beginnt Theresia. Welche Zahl sollte sie als erstes subtrahieren?

Die richtige Wahl besteht darin, zunächst 1 zu subtrahieren. Danach subtrahiert Theresia in jedem Schritt die aktuelle Einerziffer und erhält stets ein Vielfaches von 10. Stephan kann umgekehrt niemals mit seinem Zug ein Vielfaches von 10 erreichen. Somit gewinnt Theresia das Spiel. Die Vielfachen von 10 sind hier *Gewinnpositionen*: wer sie mit seinem Zug erreicht, gewinnt. Viele Spiele, bei denen die Spieler in jeder möglichen Spielsituation dieselben Züge zur Verfügung haben, lassen sich durch Analyse der Gewinnpositionen behandeln. Die wesentliche Eigenschaft lässt sich – in diesem wie in vielen anderen Beispielen – so beschreiben: von einer Gewinnposition kann man nicht in einem Zug zu einer anderen gelangen; umgekehrt kann man von jeder anderen Position zu einer Gewinnposition gelangen.

Dies sind nur zwei sehr einfache Beispiele für typische Techniken im Zusammenhang mit kombinatorischen Spielen. Viele andere kombinatorische Ideen kommen ebenso zum Einsatz, wie die folgenden Aufgaben hoffentlich zeigen werden. Viel Spaß beim Lösen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Amelie und Bertram spielen ein Spiel auf einem 2021×2021-Brett. Zu Beginn erklärt Amelie einige der Felder zu *verbotenen Feldern*, auf die nichts gesetzt werden darf. Danach setzen die beiden abwechselnd jeweils eine Münze auf das Brett, wobei Bertram beginnt. Es ist nicht erlaubt, eine Münze auf ein verbotenes Feld oder in eine Zeile oder Spalte, wo bereits eine Münze liegt, zu setzen. Wer die letzte Münze setzt, gewinnt. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Feldern, die Amelie verbieten muss um zu gewinnen, wenn beide eine optimale Strategie verfolgen?

Aufgabe 2. Charlotte und Dominik spielen das folgende Spiel: beginnend mit einem Haufen von $n \geq 4$ Steinen teilen die beiden abwechselnd einen Haufen mit zumindest 4 Steinen in zwei kleinere (nichtleere) Haufen, die beliebig groß sein können. Charlotte beginnt. Wer keinen Zug mehr machen kann, verliert. Für welche Werte von n hat Charlotte eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 3. Emma und Fabian spielen das folgende Spiel: eine positive ganze Zahl N wird vorgegeben. Emma schreibt zunächst 1 auf eine Tafel, anschließend wird abwechselnd gezogen. In jedem weiteren Zug wird die Zahl n auf der Tafel gelöscht und durch $n + 1$ oder $2n$ ersetzt. Wer mit seinem Zug die Zahl N erstmals überschreitet, verliert. Für welche Werte von N hat Fabian eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 4. Gabriel und Hannah spielen ein Spiel mit einem Stapel aus $2n$ Karten. Auf jeder Karte steht eine positive ganze Zahl. Der Stapel wird gemischt, und die Karten werden in einer Reihe aufgelegt, mit den Zahlen nach oben. Die beiden nehmen abwechselnd eine Karte von einem der beiden Enden, wobei Gabriel beginnt. Nachdem Hannah die letzte Karte genommen hat, bilden beide die Summe ihrer jeweiligen Karten. Man zeige, dass Gabriel immer so spielen kann, dass seine Summe mindestens gleich groß wie jene von Hannah ist.

Aufgabe 5. Isabella und Julian spielen das folgende Spiel: auf einem 5×5-Brett markieren sie abwechselnd freie Felder, bis kein Feld mehr frei ist. Isabella beginnt und markiert die Felder mit 1, Julian mit 0. Für jedes der neun 3×3-Teilquadrate des Bretts wird die Summe der neun Zahlen in den Feldern bestimmt. Das Maximum dieser neun Summen wird mit M bezeichnet. Wie groß kann Isabella M (unabhängig von Julians Spielstrategie) maximal machen?

Aufgabe 6. Auf einem Tisch stehen zwei Schüsseln, eine weiße und eine schwarze. In der weißen Schüssel befinden sich 2021 Kugeln. Kilian und Lara spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd ziehen (Kilian beginnt). Ein Zug besteht darin,

- eine oder mehrere Kugeln von einer Schüssel in die andere zu bewegen, oder
- eine Kugel aus der weißen Schüssel zu entfernen,

mit der Bedingung, dass die entstandene Konfiguration (d.h., die Anzahl der Kugeln in den beiden Schüsseln) nicht zuvor aufgetreten ist. Wer keinen gültigen Zug mehr machen kann, verliert. Wer von beiden hat eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 7. Magdalena und Noah bauen eine Mauer. Magdalena hat einen Vorrat an grünen würfelförmigen Bausteinen und Noah hat einen Vorrat an roten. Alle Bausteine sind gleich groß. Auf dem Boden ist eine Reihe von m Quadraten mit Kreide markiert. Magdalena und Noah legen nun abwechselnd einen Baustein entweder direkt auf eines dieser Felder oder auf einen anderen bereits vorhandenen Baustein, wobei die Höhe eines Stapels niemals n überschreiten darf. Magdalena platziert den ersten Baustein. Magdalena versucht, eine grüne Reihe zu bilden, d.h. zu erreichen, dass alle m Bausteine auf einer gewissen Höhe grün sind. Noah hingegen versucht, dies zu verhindern. Man bestimme alle Paare (m, n) von positiven ganzen Zahlen, für die Magdalena sicherstellen kann, dass sie gewinnt.

Aufgabe 8. Ein Spielfeld besteht aus allen Punkten der Form (m, n), wobei m und n ganze Zahlen mit $|m| \leq 2019$, $|n| \leq 2019$ und $|m| + |n| < 4038$ sind. Wir nennen die Punkte (m, n), für die entweder $|m| = 2019$ oder $|n| = 2019$ gilt, die Grenzpunkte. Die vier Geraden $x = \pm 2019$ und $y = \pm 2019$ heißen Grenzlinien. Zwei Punkte werden Nachbarn genannt, wenn der Abstand zwischen ihnen gleich 1 ist. Oliver und Paula spielen auf diesem Spielfeld ein Spiel. Paula beginnt mit einem Spielstein an der Stelle $(0, 0)$. Sie wechseln sich ab, wobei Oliver zuerst spielt.

- In jedem seiner Züge löscht Oliver höchstens zwei Grenzpunkte auf jeder Grenzlinie.
- In jedem ihrer Züge macht Paula genau drei Schritte, wobei ein Schritt darin besteht, ihren Spielstein von seinem aktuellen Punkt zu einem beliebigen benachbarten Punkt zu bewegen, der nicht gelöscht wurde.

Sobald Paula ihren Spielstein auf einen nicht gelöschten Grenzpunkt legt, ist das Spiel zu Ende und Paula gewinnt. Hat Paula eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 9. Quentin und Rosalie spielen folgendes Spiel. Auf einem Kreis sind n Felder angeordnet. Quentin beginnt. Quentin und Rosalie spielen abwechselnd, wobei sie in jedem Zug ein freies Feld auswählen und dort entweder O oder M hineinschreiben. Wer zuerst erreicht, dass OMO in drei nebeneinanderliegenden Feldern zu lesen ist, hat gewonnen. Sind alle Felder beschrieben, ohne dass OMO zu lesen ist, endet das Spiel unentschieden.

(a) Zeige: wenn n gerade ist, kann Rosalie mindestens ein Unentschieden erzwingen.

(b) Zeige: wenn n gerade ist und $n \geq 10$, dann hat Rosalie eine Gewinnstrategie.

(c) Zeige: wenn n ungerade ist und $n \geq 9$, dann hat Quentin eine Gewinnstrategie.

Aufgabe 10. Ulla und Valentin spielen das folgende Spiel: zu Beginn liegen zwei Münzstapel auf einem Tisch. Der erste Stapel enthält a Münzen, der zweite b Münzen, wobei $b \leq a$. Abwechselnd dürfen die beiden nun entweder eine beliebige Anzahl von Münzen von einem der Stapel entfernen, oder aber von beiden Stapeln die gleiche (aber ebenso beliebige) Anzahl Münzen. Ulla beginnt das

Spiel. Wer die letzte Münze nimmt, gewinnt. Man zeige: Valentin hat genau dann eine Gewinnstrategie, wenn für eine ganze Zahl n gilt, dass

$$a = \lfloor \phi^2 n \rfloor \quad \text{und} \quad b = \lfloor \phi n \rfloor,$$

wobei $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Tipps zu den Aufgaben

Aufgabe 1. Vergleiche Beispiel 1 aus der Einführung.

Aufgabe 2. Betrachte die Haufengrößen modulo 4, und versuche Induktion.

Aufgabe 3. Versuche, Gewinnpositionen zu identifizieren (siehe Beispiel 2 in der Einführung). Die Binärdarstellung ist hilfreich.

Aufgabe 4. Zeige zunächst, dass Gabriel so spielen kann, dass er alle Karten auf ungeraden Positionen erhält.

Aufgabe 5. Zeige, dass Isabella $M = 6$ erreichen kann, dass aber Julian $M > 6$ verhindern kann.

Aufgabe 6. Versuche, Gewinnpositionen zu identifizieren (siehe Beispiel 2 in der Einführung).

Aufgabe 7. Parität spielt eine wesentliche Rolle.

Aufgabe 8. Oliver kann Paula am Erreichen der Grenzpunkte hindern. Eine mögliche Strategie besteht darin, zunächst jeden dritten Punkt zu löschen und später die Lücken zu füllen.

Aufgabe 9. (a) Versuche ein Symmetrieargument. (b) und (c): die Konfiguration O . . O (O, gefolgt von zwei Lücken, gefolgt von einem weiteren O) ist entscheidend.

Aufgabe 10. Versuche durch Induktion nach n zu zeigen, dass die Paare $(\lfloor \phi^2 n \rfloor, \lfloor \phi n \rfloor)$ Gewinnpositionen (wie in Beispiel 2 der Einführung) sind.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

South African Mathematics Olympiad 2017, Senior, Runde 3.

Aufgabe 2.

Baltic Way 2004.

Aufgabe 3.

IMO Shortlist 2004.

Aufgabe 4.

British Mathematical Olympiad 2003/4, Runde 1.

Aufgabe 5.

IMO Shortlist 1994.

Aufgabe 6.

Skolornas matematiktävling (Schweden), Finalrunde 2019.

Aufgabe 7.

Baltic Way 2017.

Aufgabe 8.

Balkan Mathematical Olympiad 2019.

Aufgabe 9.

Österreichische Mathematikolympiade 1999, Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (erweitert; ursprünglich war nur Teil (a) gefragt). Siehe [2].

Aufgabe 10.

Bekannt (in unterschiedlichen Varianten) u.a. als *chinesisches Nim* oder *Wythoffs Spiel*, siehe z.B. [1, Band 1, S. 76].

Literatur

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. Guy. *Gewinnen. Strategien für mathematische Spiele.* Verlag Vieweg, 1985. Bände 1-4.

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen*. öbv, 1999.