53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 23. Oktober 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Florian Aigner zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 23. Oktober 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Florian Aigner trägt zum Thema im virtuellen Olympiade-Kurs am 23. Oktober 2021 von 13:15–15:00 Uhr vor. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Robinson-Schensted-Knuth Algorithmus

Einführung

Permutationen

Sei n eine positive ganze Zahl. Eine *Permutation* der Größe n ist eine Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in einer bestimmten Reihenfolge.

Beispiel. a) Die Zahlenfolge 5 3 6 2 4 1 ist eine Permutation der Größe 6. Manchmal ist es hilfreich die Zahlen mit einem Komma zu trennen, beispielsweise um 12 und 1 2 besser unterscheiden zu können. Die obige Permutation wäre dann $(5, 3, 6, 2, 4, 1)$.

b) Es gibt 6 Permutationen der Größe 3, nämlich:

$$\begin{array}{ccc} (1,2,3) & (2,1,3) & (3,1,2) \\ (1,3,2) & (2,3,1) & (3,2,1) \end{array}$$

Sei $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Permutation der Größe n. Eine *aufsteigende Teilfolge* von σ ist eine Teilfolge $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ (sprich mit gleicher Reihenfolge), sodass $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k}$.

Beispiel. Die aufsteigenden Teilfolgen der Permutation $(5, 3, 6, 2, 4, 1)$ sind:

- aufsteigende Teilfolgen der Länge 1: (1), (2), (3), (4), (5), (6).
- aufsteigende Teilfolgen der Länge 2: $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 6)$, $(5, 6)$.

Eine *absteigende Teilfolge* von σ ist eine Teilfolge $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ (sprich mit gleicher Reihenfolge), sodass $a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_k}$.

Beispiel. Die absteigenden Teilfolgen der Permutation $(5,3,6,2,4,1)$ sind:

- absteigende Teilfolgen der Länge 1: (1), (2), (3), (4), (5), (6).
- absteigende Teilfolgen der Länge 2: $(2,1)$, $(3,2)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(5,4)$, $(5,3)$, $(5,2)$, $(5,1)$, $(6,4)$, $(6,2)$, $(6,1)$.
- absteigende Teilfolgen der Länge 3: $(3,2,1)$, $(5,3,2)$, $(5,3,1)$, $(5,2,1)$, $(6,4,1)$, $(6,2,1)$.
- absteigende Teilfolgen der Länge 4: $(5,3,2,1)$.

Wir nennen eine aufsteigende (bzw. absteigende) Teilfolge *maximal*, wenn es keine längere aufsteigende (bzw. absteigende) Teilfolge gibt.

Beispiel. a) Die maximalen aufsteigenden Teilfolgen von $(5,3,6,2,4,1)$ sind $(2,4)$, $(3,4)$, $(3,6)$, $(5,6)$.

b) Die maximale absteigende Teilfolge von $(5,3,6,2,4,1)$ ist $(5,3,2,1)$.

RSK Algorithmus

Wir betrachten den *Robinson-Schensted-Knuth Algorithmus*, oder kurz *RSK*, für Permutationen. Dieser Spezialfall wird oft auch nur als *RS Algorithmus* bezeichnet. Der Algorithmus besteht aus zwei essentiellen Schritten: *Insertion* („Einfügen“) und *Bumping* („Rausschubsen“). Das *Einfügen* funktioniert wie folgt:

> Gegeben sei eine Zeile $a_1, a_2, \ldots, a_k$ aus positiven ganzen Zahlen mit $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ und eine positive ganze Zahl x, die wir in die Zeile einfügen wollen. Ist $a_k < x$, so fügen wir x als letzte Zahl hinzu. Andernfalls wählen wir die erste Zahl a_i aus die größer als x ist (sprich $x < a_i$) und ersetzen diese durch x. Die Zahl a_i wird somit aus der Zeile rausgeschubst. Zusammengefasst also:
>
> $$\begin{array}{lllll} x \to & a_1 \ldots a_k & \rightsquigarrow & a_1 \ldots a_k\, x & \text{falls } a_k < x \\ x \to & a_1 \ldots a_k & \rightsquigarrow & a_1 \ldots a_i\, x\, a_{i+2} \ldots a_k & \text{falls } a_i < x < a_{i+1} \end{array}$$

Beispiel. Wir betrachten die Zeile 1 3 4 6 9.

a) $x = 11$: Nachdem x größer als 9 ist fügen wir x am Ende der Zeile hinzu und erhalten:

$$1\ 3\ 4\ 6\ 9\ 11.$$

b) $x = 7$: Nachdem $x < 9$, können wir x nicht am Ende der Zeile hinzufügen. Die erste Zahl, die größer als x ist, ist 9. Deswegen ersetzen wir 9 mit x und erhalten:

$$1\ 3\ 4\ 6\ 7.$$

c) $x = 2$: Nachdem $x < 9$, können wir x nicht am Ende der Zeile hinzufügen. Die erste Zahl, die größer als x ist, ist 3. Deswegen ersetzen wir 3 mit x und erhalten:

$$1\ 2\ 4\ 6\ 9.$$

d) Falls wir x in eine leere Zeile einfügen wollen, so ist das Ergebnis einfach die Zeile bestehend aus x.

Der RSK Algorithmus wandelt eine Permutation in zwei tabellarische Anordnungen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ um, welche als *Insertion Tableau* beziehungsweise als *Recording Tableau* bezeichnet werden. Wir betrachten zunächst die Konstruktion des Insertion Tableau („Einfügungstabelle“):

> Sei $(a_1, \dots, a_n)$ eine Permutation der Größe n. Wir führen die folgenden Schritte der Reihe nach für $a_1, a_2, \dots, a_n$ durch:
>
> 1. Füge a_i in die erste Zeile ein (benütze dabei das oben definierte *Einfügen*).
> 2. Wird eine Zahl aus einer Zeile rausgeschubst, füge sie in die nächste Zeile ein. Wiederhole den zweiten Schritt bis keine Zahl mehr aus einer Zeile rausgeschubst wird.

Beispiel. Wir konstruieren das Insertion Tableau für die Permutation $(5, 3, 6, 2, 4, 1)$. Um klar ersichtlich zu machen welche Zahl in welcher Zeile eingefügt wird schreiben wir $x \rightarrow$ neben einer Zeile, falls wir x in diese Zeile einfügen. Weiters markieren wir die letzte eingefügte Zahl in blau.

$$5 \rightarrow \cdot \quad \rightsquigarrow \quad 5$$

$$\begin{array}{rl} 3 \rightarrow & 5 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rl} & 3 \\ 5 \rightarrow & \cdot \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 6 \rightarrow & 3 \\ & 5 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} 3 & 6 \\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} 2 \rightarrow & 3 & 6 \\ & 5 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rll} & 2 & 6 \\ 3 \rightarrow & 5 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rll} & 2 & 6 \\ & 3 & \\ 5 \rightarrow & \cdot & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} 2 & 6 \\ 3 & \\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} 4 \rightarrow & 2 & 6 \\ & 3 & \\ & 5 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rll} & 2 & 4 \\ 6 \rightarrow & 3 & \\ & 5 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} 1 \rightarrow & 2 & 4 \\ & 3 & 6 \\ & 5 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rll} & 1 & 4 \\ 2 \rightarrow & 3 & 6 \\ & 5 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rll} & 1 & 4 \\ & 2 & 6 \\ 3 \rightarrow & 5 & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rll} & 1 & 4 \\ & 2 & 6 \\ & 3 & \\ 5 \rightarrow & \cdot & \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & \\ 5 & \end{array}$$

Das Insertion Tableau ist also $\begin{array}{ll} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & \\ 5 & \end{array}$.

Es gibt einen sehr einfachen Zusammenhang zwischen der Länge einer maximalen aufsteigenden (bzw. absteigenden) Teilfolge einer Permutation und dem dazugehörigem Insertion Tableau:

Satz 1. Sei σ eine Permutation.

1. Die Länge einer maximalen aufsteigenden Teilfolge von σ ist gleich der Anzahl der Spalten im Insertion Tableau von σ.

2. Die Länge einer maximalen absteigenden Teilfolge von σ ist gleich der Anzahl der Zeilen im Insertion Tableau von σ.

Beweis. Wir beweisen hier die erste Aussage, für den zweiten Teil siehe Aufgabe 4. Genauer gesagt beweisen wir eine stärkere Aussage, nämlich, dass nach jedem *Einfüge*-Schritt folgendes gilt: Ist eine Zahl x in der ersten Zeile und der k-ten Spalte, so hat die längste aufsteigende Folge die mit x endet die Länge k. Wir beweisen dies mittels Induktion nach der Anzahl der eingefügten Zahlen:

Haben wir nur eine Zahl eingefügt, so ist die Aussage richtig, weil eine einzelne Zahl x immer eine aufsteigende Teilfolge bildet.

Wir zeigen zuerst die Existenz einer aufsteigenden Teilfolge der Länge k. Sei $a_{i_{k-1}}$ die Zahl direkt neben x (nachdem wir x eingefügt haben). Nach Induktionsannahme-Annahme ($a_{i_{k-1}}$ wurde vor x eingefügt) gibt es eine aufsteigende Teilfolge $a_{i_1} < \ldots < a_{i_{k-1}}$. Somit ist $a_{i_1} < \ldots < a_{i_{k-1}} < a_{i_k} = x$ eine aufsteigende Teilfolge der Länge k. Angenommen es gibt eine Aufsteigende Teilfolge $a_{j_1} < \ldots < a_{j_k} < x$. So muss a_{j_k} vor x in der k-ten Spalte eingefügt worden sein. Nachdem aber x in der k-ten Spalte eingefügt worden ist, gilt laut Definition des Einfüge-Schrittes $x < a_{j_k}$ was ein Widerspruch ist. □

Wie oben erwähnt, gibt es auch noch das sogenannte *Recording Tableau*. In dieses „notiert“ man, wie das Insertion Tableau schrittweise größer geworden ist. Genauer gesagt, wird das Insertion Tableau in jedem der *Einfüge*-Schritte um eine Position erweitert, auf der eine Zahl steht. Das Recording Tableau erweitern wir dabei in jedem Schritt um die selbe Position und schreiben auf diese die Nummer des *Einfüge*-Schrittes (nach dem erstem Mal Einfügen also eine 1, dann 2 und so weiter). Am besten sieht man dies anhand des folgenden Beispiels.

Beispiel. Für die Permutation $(5, 3, 6, 2, 4, 1)$ haben wir oben schon das Insertion Tableau ausgerechnet. In der folgenden Tabelle schreiben wir links das Resultat nach den jeweiligen *Einfüge*-Schritte. Rechts notieren wir dazu das Recording Tableau, wobei wir die neueste Position in blau markieren.

Insertion Tableau	Recording Tableau
$\begin{array}{l} 5 \end{array}$	$\begin{array}{l} 1 \end{array}$
$\begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array}$	$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$
$\begin{array}{ll} 3 & 6 \\ 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}$
$\begin{array}{ll} 2 & 6 \\ 3 & \\ 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & \\ 4 & \end{array}$
$\begin{array}{ll} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & \end{array}$
$\begin{array}{ll} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & \\ 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & \\ 6 & \end{array}$

Per Definition haben das Insertion und das Recording Tableau die selbe Form, sprich, für alle i ist die Anzahl der Einträge in der i-ten Zeile für beide Tableaux gleich. Weiters erfüllen das Insertion und Recording Tableau auch die folgende Eigenschaften.

Satz 2. Sei σ eine Permutation. Das Insertion Tableau und Recording Tableau erfüllen folgende Bedingungen.

1. In jeder Zeile sind die Einträge strikt monoton steigend (von links nach rechts).
2. In jeder Spalte sind die Einträge strikt monoton steigend (von oben nach unten).

Zweidimensionale Anordnungen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, die obige Eigenschaften erfüllen nennt man *Standard Young Tableaux* der Größe n.

Beweis von Satz 2. Beim Recording Tableau fügen wir die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ der Reihe nach ein. Somit gelten beide Aussagen automatisch. Für das Insertion Tableau folgt die erste Aussage aus der Definition des Einfüge-Schrittes. Für die zweite Aussage siehe Aufgabe 6. □

Eine sehr wichtige Eigenschaft des RSK Algorithmus ist die folgende.

Satz 3. Sei n eine positive ganze Zahl. Der RSK Algorithmus ist eine Bijektion zwischen Permutationen der Größe n und Paaren von Standard Young Tableaux der Größe n mit der selben Form[1].

Beweis. Siehe Aufgabe 7. □

Aufgaben

[1]Für alle i ist die Anzahl der Einträge in der i-ten Zeile für beide Tableaux gleich.

Aufgabe 1. Finde und beweise eine Formel für die Anzahl der Permutationen der Größe n.

Aufgabe 2. Sei σ die Permutation $\sigma = (5, 2, 8, 3, 1, 6, 4, 9, 7)$ der Größe 9.

a) Finde eine maximale aufsteigende Teilfolge von σ.

b) Finde eine maximale absteigende Teilfolge von σ.

Aufgabe 3. Konstruiere das *Insertion Tableau* der Permutation $(5, 2, 8, 3, 1, 6, 4, 9, 7)$.

Aufgabe 4. Beweise den zweiten Teil von Satz 1

Aufgabe 5. Überprüfe deine Ergebnisse von Aufgabe 2 anhand von Satz 1 und Aufgabe 3.

Aufgabe 6. Beweise die zweite Aussage von Satz 2 für das Insertion Tableau.

Aufgabe 7. Beweise Satz 3 indem Du einen Algorithmus findest, der den RSK Algorithmus „rückwärts ablaufen“ lässt. Sprich, zeige wie man aus dem Insertion und Recording Tableau die ursprüngliche Permutation rekonstruieren kann.

Aufgabe 8. Finde alle Permutationen der Größe 4, für welche die Länge einer maximalen aufsteigenden Teilfolge, sowie einer maximalen absteigenden Teilfolge 2 ist.

Aufgabe 9. Sei $a^2 < n \leq (a+1)^2$. Zeige, dass jede Permutation der Größe n mindestens eine aufsteigende Teilfolge oder eine absteigende Teilfolge der Länge $a+1$ hat.

Aufgabe 10. Seien r, s zwei positive ganze Zahlen und $n \geq (r-1)(s-1)+1$. Zeige dass es für eine Folge $a_1, \ldots, a_n$ von paarweise verschiedenen reellen Zahlen eine aufsteigende Teilfolge der Länge r oder eine absteigende Teilfolge der Länge s gibt (Satz von Erdős–Szekeres).

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Bei einer Permutation der Größe n haben wir n „Plätze", die mit den Zahlen $1, \ldots, n$ gefüllt werden müssen.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es die erste Stelle zu befüllen.
2. Sobald die erste Stelle befüllt wurde, wieviele Möglichkeiten gibt es für die zweite Stelle?

Aufgabe 2. Ein mögliche systematische Suche wäre:

a) Finde eine maximale aufsteigende Folge die mit $1, 2, \ldots, 9$ endet.

b) Finde eine maximale absteigende Folge die mit $9, 8, \ldots, 1$ endet.

Aufgabe 4. Eine elegante Lösung benützt eine Variation des RSK Algorithmus (Column Insertion). Siehe dazu die Kapitel 3.2 und 3.3 in [**?**].

Aufgabe 6. Zeige, dass eine Zahl x, die aus ihrer Reihe rausgeschubst wurde, in der nächsten Zeile entweder unter der alten Position oder links davon eingefügt wird.

Aufgabe 8. Benütze Satz 3 gemeinsam mit Satz 1.

Aufgabe 9. Betrachte die möglichen Formen des Insertion Tableau.

Aufgabe 10. Ersetze die n paarweise verschiedene reelle Zahlen, durch die Zahlen $1, \ldots, n$.

plain