53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 9. Oktober 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Theresia Eisenkölbl zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 6. Oktober 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Theresia Eisenkölbl trägt zum Thema im virtuellen Olympiade-Kurs am 9. Oktober 2021 von 13:15–15:00 Uhr vor. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Funktionalgleichungen

Aufgaben

Aufgabe 1. Sei M eine Menge. Eine bijektive Funktion $f : M \to M$ heißt Involution, falls $f(f(x)) = x$ für alle $x \in M$.
Zeige, dass für jede bijektive Funktion $F : M \to M$ zwei Involutionen f_1 und f_2 existieren, sodass $F(x) = f_1(f_2(x))$ für alle $x \in M$.

Aufgabe 2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_n$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n).$$

Finde alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Aufgabe 3. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$f(xf(y)) = f(xy) + x$$

für alle $x, y > 0$ gilt.

Aufgabe 4. Sei k eine feste natürliche Zahl. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(n+m) + f(n-m) = f(kn)$$

für alle natürlichen Zahlen $m \leq n$.

Aufgabe 5. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

für alle reellen Zahlen x und y.

Aufgabe 6. Sei $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ und $f_{n+1}(x) = \dfrac{(f_n(x))^2 - x^n}{f_{n-1}(x)}$ für $n \geq 1$.
Zeige, dass für jede natürliche Zahl n die Funktion f_n ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Wenn wir zwischen Elementen der Menge M Pfeile für $m \to F(m)$ zeichnen, was für Möglichkeiten gibt es für die entstehende Figur?

Aufgabe 2. Finde noch zwei andere Werte, die auch die Summe $x + y$ haben. Sieht die erhaltene Identität bekannt aus?

Aufgabe 3. Was könnte man daraus schließen, wenn die Funktion surjektiv wäre? Kann man zeigen, dass die Funktion zumindest sehr viele Werte annimmt?

Aufgabe 4. Setze verschiedene Werte ein, bei denen die rechte Seite gleichbleibt.

Aufgabe 5. Gibt es ein x mit $f(x) = 0$?

Aufgabe 6. Multipliziere mit dem Nenner, verschiebe den Index der Rekursion um 1 und kombiniere die beiden Gleichungen geschickt.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Theresia Eisenkölbl

Aufgabe 1.

Wenn wir Pfeile $m \to F(m)$ zeichnen, folgt aus der Bijektionseigenschaft, dass das entstehende Bild nur aus Kreisen (inklusive Fixpunkten) sowie Geraden besteht.
Man überlegt sich jetzt leicht mögliche Involutionen für jede Zusammenhangskomponente. Für einen Kreis $m_0 \to m_1 \to \cdots \to m_{n-1} \to m_n = m_0$ funktioniert zum Beispiel

$$f_1(m_k) = m_{n-k} \text{ und } f_2(m_k) = m_{n-1-k}.$$

Für eine Gerade

$$\cdots \to m_{-3} \to m_{-2} \to m_{-1} \to m_0 \to m_1 \to m_2 \to m_3 \to \ldots$$

funktioniert zum Beispiel

$$f_1(m_{2k+1}) = m_{2k+1}, f_1(m_{4k}) = m_{4k+2}, f_1(m_{4k+2}) = m_{4k}$$

und

$$f_2(m_{2k}) = m_{2k+1}, f_2(m_{2k+1}) = m_{2k}.$$

Aufgabe 2.

Wir setzen statt x den Wert $x+y$ ein und statt y den Wert 0. Damit erhalten wir

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+f(0)}{2}.$$

Zusammen mit der gegebenen Gleichung erhalten wir

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0).$$

Das ist fast die Cauchysche Funktionalgleichung. Wenn wir noch $g(x) = f(x) - f(0)$ definieren und $f(x) = g(x) + f(0)$ in der Gleichung ersetzen, wird das tatsächlich zu

$$g(x) + g(y) = g(x+y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Die stetigen Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung über den reellen Zahlen sind bekanntermaßen genau die Funktionen $g(x) = ax$ für eine reelle Konstante a.
Somit sind die einzigen Kandidaten für $f(x)$ die linearen Funktionen $f(x) = ax + b$. Man überprüft leicht, dass das auch wirklich Lösungen der gegebenen Gleichung sind.

Aufgabe 3.

Mit $y = 1/x$ erhält man sofort, dass die Funktion alle Werte im Intervall $]c, \infty)$ mit $c = f(1)$ annimmt.
Mit $x = 1$ erhält man $f(f(y) = f(y) + 1$. Insbesondere gilt also $f(x) = x + 1$ für $x > c$.
Wir wählen jetzt in der Ausgangsgleichung ein hinreichend großes x, sodass die Argumente auf beiden Seiten größer als c werden, also $x > \max(c/f(y), c/y)$.

Daraus ergibt sich

$$xf(y) + 1 = xy + 1 + x$$

und somit $f(y) = y + 1$ für beliebiges y.
Man überprüft leicht, dass das auch wirklich eine Lösung ist.

Aufgabe 4.

Mit der gegebenen Funktionalgleichung und ihrer Spezialisierung für $m = n$ erhalten wir

$$f(n + m) + f(n - m) = f(kn) = f(2n) + f(0).$$

Mit $n = m = 0$ sieht man zusätzlich, dass $f(0) = 0$ gilt. Also erhalten wir

$$f(n + m) + f(n - m) = f(2n).$$

Insbesondere gilt für gerade a und b, dass

$$f(a) + f(b) = f(a + b).$$

Die Cauchysche Funktionalgleichung auf den geraden natürlichen Zahlen hat aber nur die Lösungen $f(x) = cx$ für ein festes reelles c. Mit $a = b$ sieht man, dass $f(x) = cx$ bereits für alle natürlichen Zahlen gilt.
Einsetzen in die gegebene Gleichung liefert

$$2cn = ckn.$$

Damit das für alle n stimmt, muss entweder $c = 0$ sein oder $k = 2$ sein.
Die Antwort lautet also, dass die Nullfunktion für alle k eine Lösung ist, für $k = 2$ aber zusätzlich alle Funktionen $f(x) = cx$ eine Lösung sind.

Aufgabe 5.

Mit $y = -f(x)^2$ folgt sofort, dass es ein a mit $f(a) = 0$ gibt. Wir setzen nun $x = a$ und erhalten

$$f(f(y)) = y.$$

Aus $x = 0$ folgt aber $f(f(y)) = (f(0))^2 + y$, somit gilt auch $f(0) = 0$.
Wir setzen jetzt $y = 0$ und erhalten

$$f(xf(x)) = (f(x))^2.$$

Ersetzen wir hier x durch $f(x)$ und verwenden $f(f(x)) = x$, wird das zu

$$f(f(x)x) = x^2.$$

Somit gilt $(f(x))^2 = x^2$ und damit nimmt jedes $f(x)$ entweder den Wert x oder den Wert $-x$ an.
Wir nehmen jetzt an, dass es $x, y \neq 0$ gibt, sodass $f(x) = x$ und $f(y) - y$ gilt, daraus ergibt sich sofort

$$f(x^2 - y) = x^2 + y.$$

Damit gilt entweder $x^2 - y = x^2 + y$ und somit $y = 0$ oder $-x^2 + y = x^2 + y$ und somit $x = 0$, was beides der Annahme widerspricht.
Daher sind die einzigen Lösungskandidaten die Funktionen $f(x) = x$ für alle x und $f(x) = -x$ für alle x.
Man überprüft leicht, dass es sich auch wirklich um Lösungen handelt.

Aufgabe 6.

Die Rekursion wird durch Multiplikation mit dem Nenner zur Gleichung

$$f_{n+1}(x)f_{n-1}(x) = (f_n(x))^2 - x^n.$$

Wenn wir n durch $n+1$ ersetzen erhalten wir

$$f_{n+2}(x)f_n(x) = (f_{n+1}(x))^2 - x^{n+1}.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit x, subtrahieren die beiden Gleichungen und erhalten

$$f_n(x)(f_{n+1}(x) + xf_n(x)) - f_{n+1}(x)(f_{n+1}(x) + xf_{n-1}(x)) = 0.$$

Somit gilt

$$\frac{f_{n+1}(x) + xf_{n-1}(x)}{f_n(x)} = \frac{f_n(x) + xf_{n-2}(x)}{f_{n-1}(x)} = \cdots = \frac{f_2(x) + xf_0(x)}{f_1(x)} = \frac{x^2 - x + x \cdot 1}{x} = x.$$

Also erhalten wir die Rekursion

$$f_{n+1}(x) + xf_{n-1}(x) = xf_n(x).$$

In der Form

$$f_{n+1}(x) = x(f_n(x) - f_{n-1}(x))$$

sieht man aber sofort, dass es sich bei allen Funktionen um Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten handelt.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 1.

Ufnarovski, Mathematical Buffet, Problem 16

Aufgabe 2.

Ufnarovski, Mathematical Buffet, Problem 24

Aufgabe 3.

Ufnarovski, Mathematical Buffet, Problem 36

Aufgabe 4.

Ufnarovski, Mathematical Buffet, Problem 79

Aufgabe 5.

Ufnarovski, Mathematical Buffet, Problem 87.

Aufgabe 6.

Ufnarovski, Mathematical Buffet, Problem 108