53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Kurs für Internationale „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 25. September 2021

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Theresia Eisenkölbl zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 23. September 2021 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Theresia Eisenkölbl trägt zum Thema im virtuellen Olympiade-Kurs am 25. September 2021 von 13:15–15:00 Uhr vor. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Zifferndarstellungen

Aufgaben

Aufgabe 1. Sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl.
Zeige, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 1$ für ein geeignetes k eindeutig als

$$n = n_k b^k + \cdots + n_1 b^1 + n_0 b^0$$

darstellen lässt, wobei $n_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ und $n_k \neq 0$.

Aufgabe 2. Für welche Basen b besitzt die Zifferndarstellung von 2021 lauter gleiche Ziffern?

Aufgabe 3.
- **a.** Finde eine Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch 2 für eine Zahl in der Darstellung zur Basis 3.
- **b.** Finde eine Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch 3 für eine Zahl in der Darstellung zur Basis 2.

Aufgabe 4. Wir betrachten die folgende Operation, die aus einer gegebenen natürlichen Zahl eine neue Zahl entstehen lässt: Die gegebene Zahl wird in einer beliebigen ganzzahligen Basis $b \geq 2$ dargestellt, in der sie zweistellig mit beiden Ziffern ungleich 0 ist. Dann werden die beiden Ziffern vertauscht und das Ergebnis in der Zifferndarstellung zur Basis b ist die neue Zahl. Ist es möglich, mit eventuell mehreren dieser Operationen jede Zahl größer als 10 zu einer Zahl kleiner oder gleich 10 zu verändern?

Aufgabe 5. Für ein „Wort“ a, das als „Buchstaben“ nur 0 und 1 enthält, sei $\sigma(a)$ das Wort, das man erhält, wenn man die Ersetzungen

$$0 \to 01 \text{ und } 1 \to 10$$

vornimmt.
Wir beginnen jetzt mit $a_0 = 0$ und definieren $a_{n+1} = \sigma(a_n)$.

a. Zeige, dass es ein unendlich langes Wort w gibt, sodass die ersten 2^n Buchstaben des Wortes w das Wort a_n ergeben.

b. Wir bezeichnen die Buchstaben in w mit

$$w = w_0 w_1 w_2 w_3 \dots.$$

Zeige, dass w_n die Parität der Ziffernsumme von n in der Binärdarstellung ist.

Aufgabe 6. Wir betrachten die Basis $b = 3$, erlauben jetzt aber statt der üblichen Ziffern $\{0, 1, 2\}$ die Ziffern $\{-1, 0, 1\}$.

a. Welche Zahlen lassen sich für ein geeignetes k als $n_k b^k + \cdots + n_1 b^1 + n_0 b^0$ mit $n_k \neq 0$ darstellen?

b. Ist die Darstellung eindeutig?

Aufgabe 7. Wir überlegen uns jetzt, was für die negative Basis $b = -2$ passiert, wenn die Ziffern 0 oder 1 sein dürfen.

a. Welche Zahlen lassen sich für ein geeignetes k als $n_k b^k + \cdots + n_1 b^1 + n_0 b^0$ mit $n_k \neq 0$ darstellen?

b. Ist die Darstellung eindeutig?

Aufgabe 8. Wir ersetzen nun die Potenzen einer Basis b durch Faktorielle und betrachten Ausdrücke der Form

$$n_k \cdot k! + n_{k-1} \cdot (k-1)! + \cdots + n_1 \cdot 1!,$$

wobei $n_i \in \{0, 1, \dots, i\}$ liegt und $n_k \neq 0$ gilt.

a. Welche Zahlen n lassen sich mit so einem Ausdruck darstellen?

b. Ist die Darstellung eindeutig?

Aufgabe 9. Die Fibonaccizahlen sind definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

a. Zeige, dass sich jede natürliche Zahl n für ein geeignetes k als

$$n = F_{n_1} + F_{n_2} + \cdots + F_{n_k}$$

darstellen lässt, wobei $n_1 \geq 1$ und $n_i > n_{i-1} + 1$. (Es dürfen also keine gleichen oder aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen verwendet werden.)

b. Ist die Darstellung eindeutig?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Ein induktiver Beweis ist sowohl durch Bestimmung von n_k als auch Bestimmung von n_0 möglich.

Aufgabe 3. Wie verhalten sich die Potenzen der Basis modulo des gewünschten Teilers?

Aufgabe 4. Jede Zahl größer als 10 lässt sich in ein oder zwei Schritten kleiner machen.

Aufgabe 5. Zeige mit Induktion, dass $a_{n+1} = a_n\overline{a_n}$, wobei $\overline{0} = 1$ und $\overline{1} = 0$.

Aufgabe 6. Induktionsbeweis oder auf eine bekannte Darstellung zurückführen.

Aufgabe 7. Kleine Fälle betrachten. Induktionsbeweis.

Aufgabe 8. "greedy algorithm": Ziehe immer die größtmögliche Faktorielle mit der größtmöglichen Ziffer ab und zeige, dass das gutgeht.

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Theresia Eisenkölbl

Aufgabe 2.

Für $b = 46$ und $b \geq 2022$.

Aufgabe 3.

a. Sei $n = (n_k \dots n_1 n_0)_3$. Da $3^k \equiv 1^k = 1 \pmod 2$ ist, gilt auch

$$n \equiv n_0 + n_1 + \cdots + n_k \pmod 2.$$

b. Sei $n = (n_k \dots n_1 n_0)_2$. Da $2^k \equiv (-1)^k \pmod 3$ ist, gilt auch

$$n \equiv n_0 - n_1 \pm \cdots + (-1)^k n_k \pmod 3.$$

Aufgabe 4.

Wir zeigen, dass wir aus jeder Zahl > 10 eine kleinere Zahl erzeugen können. Damit werden wir irgendwann eine Zahl ≤ 10 erreichen. Wenn die Zahl $n = 2k + 1$ ungerade ist, dann wählen wir als Basis für die Zifferndarstellung $b = k$. Es gilt also $n = (21)_k$. Damit erhalten wir als neue Zahl $(12)_k = k + 2$. Da $k \geq 5$ gelten muss, ist die Wahl von $b = k$ zulässig und es gilt $k + 2 \leq 2k - 5 + 2 < 2k + 1$ wie gewünscht. Wenn die Zahl $n = 2k$ gerade ist, wählen wir als Basis $b = 2k - 2$ und erhalten $n = (12)_{2k-2}$. Die neue Zahl ist also $(21)_{2k-2} = 4k - 3$. Jetzt wählen wir als Basis $k - 1$ und erhalten $4k - 3 = (41)_{k-1}$. Die neue Zahl ist also $(14)_{k-1} = k + 3$. Wegen $k > 5$ sind beide Basen größer als die größte vorkommende Ziffer und somit zulässig und es gilt $k + 3 < 2k$ wie gewünscht.

Aufgabe 5.

Offensichtlich gilt $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ und $\sigma(\overline{x}) = \overline{\sigma(x)}$. Wir zeigen jetzt mit Induktion, dass $a_{n+1} = a_n\overline{a_n}$. Das stimmt natürlich für $n = 0$.
Der Induktionsschritt folgt sofort aus

$$a_{n+2} = \sigma(a_{n+1}) = \sigma(a_n\overline{a_n}) = \sigma(a_n)\sigma(\overline{a_n}) = \sigma(a_n)\overline{\sigma(a_n)} = a_{n+1}\overline{a_{n+1}}.$$

a. Da wir nun bewiesen haben, dass a_n der Beginn von a_{n+1} ist, werden also einfach nur immer weiter Buchstaben angehängt, somit entsteht ein unendliches Wort w mit Anfangsabschnitt a_n. Da sich die Anzahl der Buchstaben in jedem Schritt verdoppelt, hat das Wort a_n in der Tat genau 2^n Buchstaben.

b. Wenn wir mit $p(n)$ die Parität der Ziffernsumme von n in der Binärdarstellung bezeichnen, dann gilt für $n < 2^k$ offensichtlich

$$p(n) = \overline{p(2^k + n)}.$$

Das entspricht aber genau der Gleichung $\sigma(a_n) = a_n\overline{a_n}$. Da natürlich auch w_0 den richtigen Wert hat, ist alles gezeigt.

Aufgabe 6.

Sei $0 \leq z \leq (3^k-1)/2$. Für $x = z+(3^k-1)/2$ gilt $x \leq 3^k-1$, also hat x eine normale Darstellung zur Basis 3 der Länge höchstens k. Wenn wir nun $(3^k-1)/2$ abziehen, wird von jeder Ziffer in diesem Bereich 1 abgezogen, sodass man wie gewünscht eine Darstellung von z mit den Ziffern $\{-1, 0, 1\}$ erhält.
Die Darstellung einer negativen Zahl $-z$ erhält man sofort durch Änderung der Vorzeichen der Darstellung von z.

Aufgabe 7.

Es lassen sich alle ganzen Zahlen eindeutig darstellen. Dazu nehmen wir an, dass sich bereits alle Zahlen mit z mit $|z| < 2^k$ eindeutig darstellen lassen. Sei nun $2^k \leq z < 2^{k+1}$. Wenn k gerade ist, dann muss 2^k in der Darstellung vorkommen und $z - 2^k$ hat auch nach Voraussetzung bereits eine eindeutige Darstellung, zu der man 2^k einfach addieren kann.
Wenn k ungerade ist, dann muss 2^{k+1} vorkommen und es hat $z - 2^{k+1}$ nach Voraussetzung eine eindeutige Darstellung, zu der man 2^{k+1} einfach addieren kann.
Das Argument für die negativen Zahlen im betrachteten Bereich funktioniert analog.
Somit lässt sich nach Induktion jede ganze Zahl eindeutig darstellen.

Aufgabe 8.

Wir nehmen an, dass es für $n < a!$ bereits so eine eindeutige Darstellung gibt.
Für $a! \leq n < (a+1)!$ muss $k = a$ gewählt werden, weil $k = a+1$ offensichtlich zu groß ist und $k = a-1$ aufgrund der folgenden Ungleichung zu klein ist:

$$\begin{aligned} n_{a-1} \cdot (a-1)! + n_{a-2} \cdot (a-2)! + \cdots + n_1 \cdot 1! & \\ &\leq (a-1) \cdot (a-1)! + \cdots + 1 \cdot 1! \\ &= a! - (a-1)! + (a-1)! - (a-2)! + \cdots + 2! - 1! \\ &= a! - 1. \end{aligned}$$

Wenn wir nun $a!$ so oft wie möglich abziehen, erhalten wir $n - n_a a! < a!$, was nach Voraussetzung eine eindeutige Darstellung hat.

Quellenangaben zu den Aufgaben

Aufgabe 4.

ÖMO BWF 2015, Theresia Eisenkölbl.