AUFGABEN ZUM SCHULSTOFF FÜR DIE STEOP
BSC MATHEMATIK, WINTERSEMESTER 2019/20

Selbststudium, Workshops und E-Learning zur Aufarbeitung des Schulstoffs sind mit 4 ECTS (entsprechend also einem geschätzten Arbeitsaufwand der Studierenden von 100 Stunden) Teil des StEOP Pflichtmoduls *Grundlagen der Höheren Mathematik* im Bachelorstudium Mathematik an der Universität Wien. Aufgaben zum Schulstoff sind dann Teil der schriftlichen Prüfung zur *Einführung in das mathematische Arbeiten* (EMA).

Mathematik ist kreativ und – wie andere hochentwickelte kreative Bereiche auch – über weite und wichtige Strecken Handwerk. Die Aufgaben, die wir hier zusammengestellt haben, sind ein aufrichtiger Versuch, alles Handwerk aus dem Schulstoff, von dem wir hoffen, dass es die StudienanfängerInnen aus ihrer Vorbildung und der StEOP in die weiterführenden Lehrveranstaltungen mitbringen, abzubilden.

Die EMA-Prüfungsfragen zum Schulstoff werden sich in Art und Schwierigkeit an den Aufgaben, die wir in dieser Sammlung beschreiben, orientieren.

Bitte beachte auch, dass du bei der EMA-Prüfung ohne die Anleitungen und kleingedruckten Tipps zur Bearbeitung der Aufgaben, die hier noch beigegeben sind, auskommen musst.

Wir hoffen, dass du das Angebot der StEOP-Tutorien, die wir auch im Wintersemester 2019 anbieten, nutzen wirst. In den Tutorien kannst du mit anderen StudienanfängerInnen und erfahrenen TutorInnen über Mathematik ins Gespräch kommen.

Datum: 1. Oktober 2019.

1. Terme & Gleichungen

Die Aufgabensammlung zur Termrechnung enthält grundlegende Aufgaben zum Schulstoff.

Die mit einem ☆ markierten Fragen in dieser Sammlung sind besonders aufwändig oder trickreich zu beantworten. Alle anderen (Teil-)Aufgaben in dieser Sammlung entsprechen in Art und Anspruch Fragen zum Schulstoff, mit denen du unbedingt bei der EMA-Prüfung rechnen solltest.

2. Analytische Geometrie

2.1 (Abstand Punkt zu Gerade)**.** Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist das Quadrat des Abstands vom Punkt $P = (5 \mid -3 \mid 13)$ zum Punkt $(4 - 2 \cdot t \mid 3 \cdot t \mid 3 + 4 \cdot t)$ am kleinsten? Tipp: Ergänze quadratisch.
Erkläre anschaulich, wie du mit dieser Überlegung den auf der Geraden $\ell = \{(4-2 \cdot t \mid 3 \cdot t \mid 3+4 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ nächsten Punkt an P findest. Dieser nächste Punkt wird manchmal auch als Lotpunkt bezeichnet. Ein Lot hat immer etwas mit einem rechten Winkel zu tun. Kannst du erklären, warum diese Bezeichnung sinnvoll ist? Der Abstand zwischen dem Punkt P und seinem Lotpunkt auf der Geraden ist dann der Abstand von P zur Geraden. Berechne den Lotpunkt und den Abstand des Punkts von der Geraden in den folgenden Fällen:

1) $\ell = \{(4 - 5 \cdot t \mid 7 - 5 \cdot t \mid 12 - 10 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $P = (5 \mid 0 \mid 0)$
2) $\ell = \{(-4 + 10 \cdot t \mid -t \mid 6 + 3 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $P = (4 \mid 1 \mid -2)$

2.2. Durch den Punkt P ist eine Gerade, die normal auf die Ebene π steht, zu legen. Schneide dann die Ebene mit dieser Geraden. Der Schnittpunkt P_0 ist dann der *Lotpunkt* des Punktes P auf die Ebene π.

1) $\pi: \; -2 \cdot x + 3 \cdot y - 6 \cdot z = -6$, $P = (-1 \mid 10 \mid -10)$
2) $\pi: \; 4 \cdot x - 4 \cdot y - 7 \cdot z = 8$, $P = (-5 \mid 8 \mid 3)$
3) $\pi: \; -14 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z = -7$, $P = (-13 \mid 8 \mid -2)$
4) $\pi: \; 4 \cdot x + 4 \cdot y - 7 \cdot z = 1$, $P = (9 \mid 9 \mid -13)$.

Der Lotpunkt hat die ausgezeichnete Eigenschaft, dass jeder andere Punkt auf der Ebene noch größeren Abstand zu P hat. Erkläre, weshalb ausgerechnet der Lotpunkt diese besondere Eigenschaft hat.
Tipp: Sei X irgendein Punkt auf der Ebene π. Erkläre, weshalb die Vektoren $\overrightarrow{XP}$ und $\overrightarrow{P_0P}$ normal aufeinander stehen. Argumentiere so, dass $|\overrightarrow{XP}|^2 = |\overrightarrow{XP_0}|^2 + |\overrightarrow{P_0P}|^2 \geq |\overrightarrow{P_0P}|^2$ und damit, dass $|\overrightarrow{XP}| \geq |\overrightarrow{P_0P}|$. Wann gilt denn Gleichheit?

2.3. Gegeben seien Punkte A, B, C, P und Q im Raum. Finde heraus, ob die Gerade durch P und Q einen Schnittpunkt mit der Ebene hat, die A, B und C enthält und berechne diesen Schnittpunkt, falls er existiert. Muss man dafür ein Gleichungssystem mit 3 Variablen betrachten, oder führt die Normalvektordarstellung der Ebene zu einem einfacheren Weg? Gibt es einen Fall, den man gesondert behandeln muss?

(i) $A = (1 \mid 2 \mid 3)$, $B = (4 \mid 3 \mid 0)$, $C = (5 \mid 4 \mid 1)$, $P = (2 \mid 1 \mid 2)$, $Q = (6 \mid 7 \mid 10)$.
(ii) $A = (-1 \mid 2 \mid 3)$, $B = (7 \mid 4 \mid 1)$, $C = (1 \mid 2 \mid 1)$, $P = (1 \mid 1 \mid -1)$, $Q = (3 \mid 5 \mid 1)$.

2.4. Betrachten wir 2 windschiefe Gerade g und h im Raum, also Geraden die weder parallel sind, noch einen Schnittpunkt besitzen. Finde einen Punkt P von g und einen Punkt Q von h, sodass die Verbindungsstrecke von P nach Q normal auf beide Geraden steht. Erkläre, warum für jeden Punkt $P' \neq P$ von g und jeden Punkt $Q' \neq Q$ von h, der Abstand von P' zu Q' größer ist als der Abstand von P zu Q. Was würde passieren, wenn man im Fall von 2 schneidenden Geraden analog rechnet?

(i) $g = \{(-4 + 2 \cdot t \mid -t \mid 10 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $h = \{(2 + s \mid 7 - 2 \cdot s \mid -12 + 5 \cdot s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.
(ii) $g = \{(-5 + 4 \cdot t \mid 2 - 2 \cdot t \mid 3 + t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $h = \{(5 + 3 \cdot s \mid -2 + s \mid 11 + 2 \cdot s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.

2.5. Was kann damit gemeint sein, dass man einen Punkt P oder eine Strecke $\overline{PQ}$ im Raum an einer Ebene E spiegelt? Bestimme die Spiegelungen in den folgenden Situationen explizit.

(i) $E = \{(2 + 6 \cdot s + 2 \cdot t \mid -3 + 2 \cdot s + 3 \cdot t \mid 6 - s + 2 \cdot t) : s, t \in \mathbb{R}\}$, $P = (1 \mid -3 \mid 2)$
(ii) $E = \{(x \mid y \mid z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 2z = -2\}$, $P = (2 \mid 1 \mid 1)$, $Q = (-1 \mid -2 \mid 0)$.

Zusatzfrage: Könnte man einen Punkt oder eine Strecke im Raum auch an einer Geraden spiegeln?

2.6. Sei π die Ebene mit der Gleichung $-2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 14$, P der Punkt $(2 \mid 1 \mid 3)$ und ℓ die Gerade durch den Punkt $(-1 \mid 1 \mid 2)$ mit Richtungsvektor $(1 \mid 2 \mid -1)$. Finde den Richtungsvektor für eine Gerade durch P, die parallel zu π ist und die ℓ schneidet. Überlege, warum es nur eine solche Gerade gibt.

2.7. Die Seiten eines ebenen Dreiecks liegen auf den Geraden

$$\ell_1 : \ 3 \cdot x + 4 \cdot y = 42, \qquad \ell_2 : \ 3 \cdot y - 4 \cdot x = 19, \qquad \ell_3 : \ 7 \cdot x - 24 \cdot y = 98.$$

Bestimme die Eckpunkte des Dreiecks und seine Seitenlängen. Weise mit einem Argument aus der Unterstufe nach, dass dieses Dreieck rechtwinkelig ist und berechne seinen Flächeninhalt.

3. INFINITESIMALRECHNUNG

3.1. Ermittle die Nullstellen der gegebenen Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ermittle die ersten beiden Ableitungen von f und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten. Ermittle den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, den der Graph mit der x-Achse einschließt.

a) $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2$ **b)** $f(x) = x^4 - 4 \cdot x^3$ **c)** $f(x) = x^5 + 5 \cdot x^4$

3.2. Sei $a > 0$. Berechne den Flächeninhalt, der vom Graphen der Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^2 - x^2$ mit der horizontalen Achse zwischen den beiden Nullstellen eingeschlossen wird.

3.3. Sei $a > 0$. Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - a^2 \cdot x$ auf Nullstellen sowie ihr Monotonie- und Krümmungsverhalten. Skizziere den Graphen von f. Berechne den Flächeninhalt des beschränkten Bereichs, der unter dem Graphen von f und über der horizontalen Achse liegt.

3.4. Gegeben ist die Gerade $y = 4 \cdot x + 1$. Gesucht ist die Polynomfunktion f vierten Grades, deren Graph nie überhalb der Geraden liegt und die Gerade an den Stellen -1 und 1 berührt. Weiter ist bekannt, dass die Gerade und der Graph ein Flächenstück mit Inhalt $16/15$ einschließen.
Ermittle eine Gleichung von f.

3.5. Eine kubische Polynomfunktion hat eine einfache Nullstelle bei -1 und eine doppelte Nullstelle bei 1. Ihr Graph berandet mit der x-Achse einen Bereich mit orientiertem Flächeninhalt 8.
Ermittle eine Gleichung der Polynomfunktion.

3.6. Eine Polynomfunktion f dritten Grades hat bei $x = -1$ eine Wendestelle. Eine Gleichung der Wendetangente ist $y + 3 \cdot x + 5 = 0$. Die Funktion hat eine Nullstelle bei -2.

a) Ermittle eine Gleichung von f.
b) Ermittle den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, den der Graph der Polynomfunktion gemeinsam mit der x-Achse berandet.

3.7. Eine Polynomfunktion f dritten Grades hat bei $x = 2$ eine Wendestelle. Eine Gleichung der Wendetangente ist $9 \cdot y + 3 \cdot x = 8$. Die Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle 0 schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel von $45°$ ein. Diese Tangente berandet mit dem Graphen der Polynomfunktion einen endlichen Bereich. Was ist sein Flächeninhalt?

3.8. Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$. Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

spielt als Dichtefunktion der Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine sehr wichtige Rolle.

a) Zeige ohne Differentialrechnung, dass f an der Stelle μ ein globales Maximum hat.
b) Zeige, dass die Wendestellen von f bei $\mu \pm \sigma$ liegen.
c) Zeige, dass die beiden Wendetangenten ihre Nullstelle bei $\mu + 2 \cdot \sigma$ bzw. $\mu - 2 \cdot \sigma$ haben.

3.9. Wir betrachten Geraden durch den Punkt $A = (1 \mid 2)$ mit Steigung $k < 0$. Wie muss k gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Dreiecks, das von der Geraden und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird, möglichst klein wird?

3.10. Gegeben ist ein Drehkegel mit Radius R und Höhe H. Diesem Drehkegel wird ein Drehzylinder eingeschrieben. Die Basis des Zylinders ruht dabei auf der Basis des Kegels.

a) Gibt es einen solchen Zylinder, der zumindest das halbe Volumen des Drehkegels ausfüllt?
b) Für welchen Radius ist die Oberfläche des Zylinders so groß wie möglich?

Aufgabe 3.11 (Ableiten nach allen Regeln der Kunst)**.** Berechne die ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen auf den angegebenen Intervallen. Auf welchen (offenen) Intervallen sind diese Funktionen fallend, auf welchen wachsend?

1) $f(x) = 2^x$ auf $\mathbb{R}$
2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ auf $\mathbb{R}$
3) $f(x) = x^x$ auf $]0, \infty[$
4) $f(x) = (x \cdot \ln(2 \cdot x))^3$ auf $]0, \infty[$
5) $f(x) = (1 - \sqrt{x})/(1 + \sqrt{x})$ auf $]0, \infty[$
6) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ auf $]0, \infty[$
7) $f(x) = \int_1^{e^x} (\ln t)^{100}\, \mathrm{d}t$ auf $]0, \infty[$
8) $f(x) = \int_0^{2 \cdot x} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ auf $]0; \infty[$.

Die Ableitungsregeln inklusive Produkt-, Quotienten-, und Kettenregel sowie die Ableitung der elementaren Funktionen samt x^α, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, e^x, $\ln(x)$ solltest du bei der EMA-Prüfung auswendig kennen und können. Mit anderen Worten, du solltest die Funktionen, die es in Schulbüchern zum Differenzieren gibt, auch differenzieren können.

Dieses Werk von Mathematik macht Freu(n)de unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
http://mmf.univie.ac.at