Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Maria Charina und Stefan Haller

DAUER: 60 Minuten

STEOP: Modulprüfung — Einführung in die Mathematik
2. Termin am 10. Jänner 2019, 8:00–9:30 Uhr in HS 1 und HS 6

Prüfungseinsicht: ???

Nachname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: .... Studienkennzahl: ....

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

Sie können maximal 40 Punkte erreichen. Mit mindestens 20 Punkten ist die Prüfung bestanden.

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Notenskala:

Note	5	4	3	2	1
Punkte	< 20	$20-24$	$25-29$	$30-34$	≥ 35

Aufgabe 1: .... (7 Punkte)

(a) Definieren Sie die Mengendifferenz $A \setminus B$ zweier Mengen A und B.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Für beliebige Mengen A und B gilt

$$(A \cup B) \cap A = A \cup (B \cap A).$$

a)

$$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$$

1P. 1P.

1P. falls insgesamt korrekte Beschreibung (verbal oder ~~...~~ mittels Mengenschreibweise)

b)

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap A$	$B \cap A$	$A \cup (B \cap A)$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

1P. ident 1P. 1P.

1P. $(A \cup B) \cap A = A \cup (B \cap A)$ ~~1P.~~

andere (schlüssige) Argumentation auch zulässig

Aufgabe 2: .... (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage **mittels vollständiger Induktion**: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt

$$2^n \geq n + 2.$$

1 P. 1 P.

IA $(n=2)$: $\underbrace{2^2}_{4} \geq \underbrace{2+2}_{4}$ w. A.

IV: Sei $n \geq 2$ und $2^n \geq n+2$ 1 P

IS: z. z. $2^{n+1} \geq n+3$ 1 P. bzw. $(n+1)+2$

$2^{n+1} = 2^n + 2^n$ 1 P. $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$

$\geq (n+2) + \underbrace{(n+2)}_{\geq 1}$ 1 P. $\geq 2(n+2)$

1 P. $= n+3+\underbrace{n+1}_{\geq 0}$

$\geq n+3$ 1 P. $\geq n+3$

Aufgabe 3: .... (7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}_7$ der Gleichung $x^2 = \bar{2}$.

(b) Welche Elemente von $\mathbb{Z}_6$ besitzen ein multiplikatives Inverses? Geben Sie die Inversen aller invertierbaren Elemente an.

a)

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

$x_1 = \bar{3}$ (1P)

$x_2 = \bar{4}$ (1P)

Keine falschen Lösungen (1P)

$\mathbb{L} = \{\bar{3}, \bar{4}\}$

b) Invertierbare Elemente: $\bar{1}$, $\bar{5} = -\bar{1}$ 1P. 1P.

Inverse: $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{5}$ 1P. 1P.

denn $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ und $\bar{5} \cdot \bar{5} = \overline{25} = \bar{1}$

Aufgabe 4: .... (8 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 + 1$ sowie die Teilmengen $A := \mathbb{R}$ und $B := [5, 10]$. Bestimmen Sie die Bildmenge $f(A)$ und die Urbildmenge $f^{-1}(B)$.

(b) Bestimmen Sie eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}$, sodass $g\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to C$, $g(x) := \frac{1}{x-1}$ eine Bijektion definiert und geben Sie die Umkehrabbildung von g (inkl. Definitions- und Zielbereich) an.

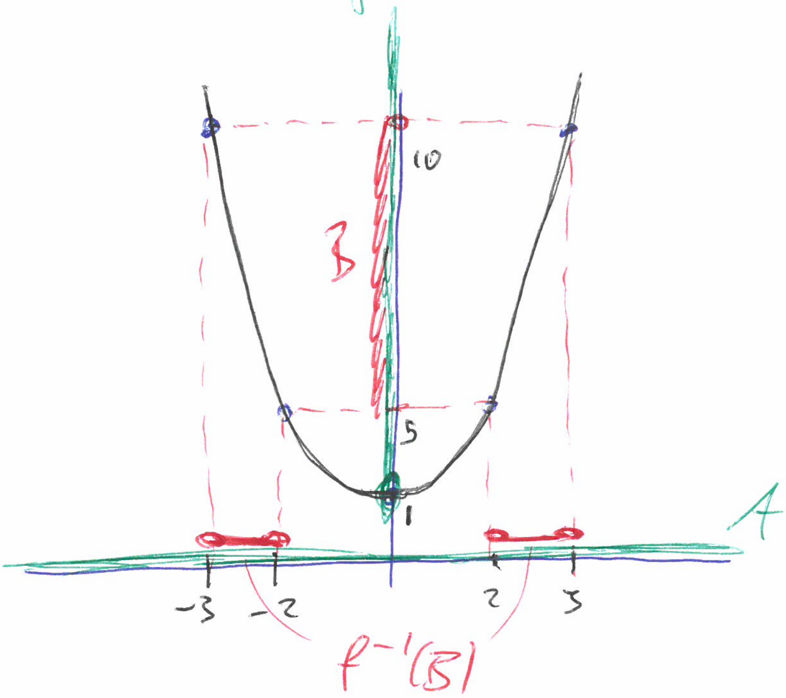
1 P. (Grenzen)

a) $f(A) = [1, \infty)$ 1 P.

$f^{-1}(B) = [-3, -2] \cup [2, 3]$ 1 P.

1 P.

1 P. (Grenzen)



$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$

$\iff x^2 + 1 \in [5, 10]$

$\iff 5 \leq x^2 + 1 \leq 10$

$\iff 4 \leq x^2 \leq 9$

$\iff 2 \leq |x| \leq 3$

$\iff x \in [2, 3] \cup [-3, -2]$

b) $C = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 1 P.

$g^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g^{-1}(y) = \frac{1}{y} + 1$

1 P. 1 P.

Aufgabe 5: .... (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Mengenvereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ der Intervalle $A_n := [\frac{1}{n}, n]$.

1P. (0 exkl.)

1P. (∞ exkl.)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, \infty)$$

1P. 1P.

Intervall 1P.

Aufgabe 6: .... (5 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils nur eine Antwort an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt und jede falsche Antwort mit −1 Punkt bewertet. Ist die so erhaltene Gesamtpunktezahl negativ, runden wir sie auf 0 auf.

(a) Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei Abbildungen und ist $g \circ f$ injektiv, dann muss auch f injektiv sein.

- ☒ wahr
- ☐ falsch

(b) Es gibt Abbildungen $f\colon X \to Y$ und Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$, sodass $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

- ☒ wahr
- ☐ falsch

(c) Welche der folgenden komplexen Zahlen stimmt mit $\mathbf{i}^7$ überein?

- ☐ -1
- ☒ $-\mathbf{i}$

(d) Welche der folgenden Aussagen ist zu $r \Rightarrow p \vee q$ äquivalent?

- ☒ $r \wedge \neg p \Rightarrow q$
- ☐ $p \wedge q \Rightarrow \neg r$

(e) Welcher der folgenden beiden Ausdrücke stimmt mit der Summe $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$ überein?

- ☐ $\sum_{j=1}^{m} \frac{-(-1)^j}{j+2}$
- ☒ $\sum_{i=2}^{m+1} \frac{(-1)^i}{i-1}$

Zusatzblatt: