Aufgabe 1: .... (6 Punkte)

(*i*) Definieren Sie den Begriff *neutrales Element* einer Gruppe $(G, \circ)$.

(*ii*) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Verknüpfung $\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \otimes b = a \cdot b - 2$ ist assoziativ.

(i) $\underbrace{e \in G \text{ heißt neutrales Element von } (G, \circ),}_{1P}$

wenn

$$\underbrace{\forall x \in G}_{1P} : \underbrace{x \circ e = e \circ x = x}_{1P}$$

(ii) $\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \otimes b = a \cdot b - 2$ ist nicht assoziativ, da für $\underbrace{a = 1 \text{ und } c = -1}_{1P}$, $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1 \otimes b) \otimes (-1) = (b - 2) \cdot (-1) - 2 = -b \qquad 1P$$

$$\neq$$

$$1 \otimes (b \otimes (-1)) = -b - 2 - 2 \qquad 1P$$

Aufgabe 2: .... (8 Punkte)

Beweisen Sie **mittels vollständiger Induktion:** Für alle $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Sei $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

I.A. $n=0$ $\quad \underbrace{\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}}_{1P}$

1P

I.V. $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

2P

I.S.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}}_{1P} \overset{\text{I.V.}}{=}$$ 1P

$$\underbrace{\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-\dots}{1-q}}_{1P}$$

$$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

1P

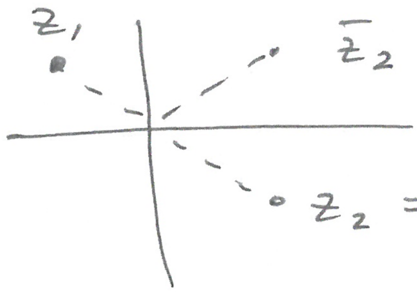
Aufgabe 3: .... (6 Punkte)

Ergänzen Sie die folgende Tabelle und geben Sie die entsprechenden Rechenschritte an.

	z	$\overline{z}$	z^2	$\lvert z\rvert^2$	$0 \le \phi = \arg(z) < 2\pi$
1)	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$	$-i$	1	$\pi \le \phi < 2\pi$
2)	$\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$2i$	2	$\frac{5\pi}{4}$

1) $z^2 = -i = e^{i(3\pi/2 + 2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$z_{1,2} = e^{i(3\pi/4 + \pi k)} \qquad k = 0, 1$



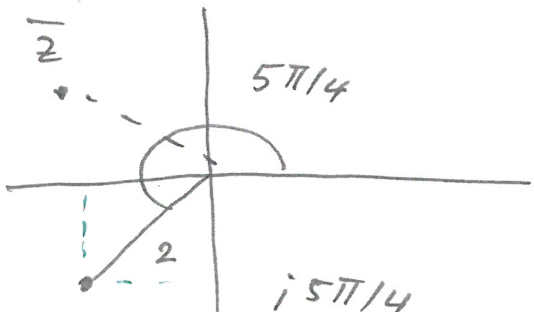
$\overline{z}_2 = -1/\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$|z|^2 = 1$

2)

$|z|^2 = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$



$z = \sqrt{2} \cdot e^{i\,5\pi/4}$ $\qquad \overline{z} = \sqrt{2} \cdot e^{i\,3\pi/4}$

$z^2 = \sqrt{4}\, e^{i\,10\pi/4} = 2i$

Aufgabe 4: .... (7 Punkte)

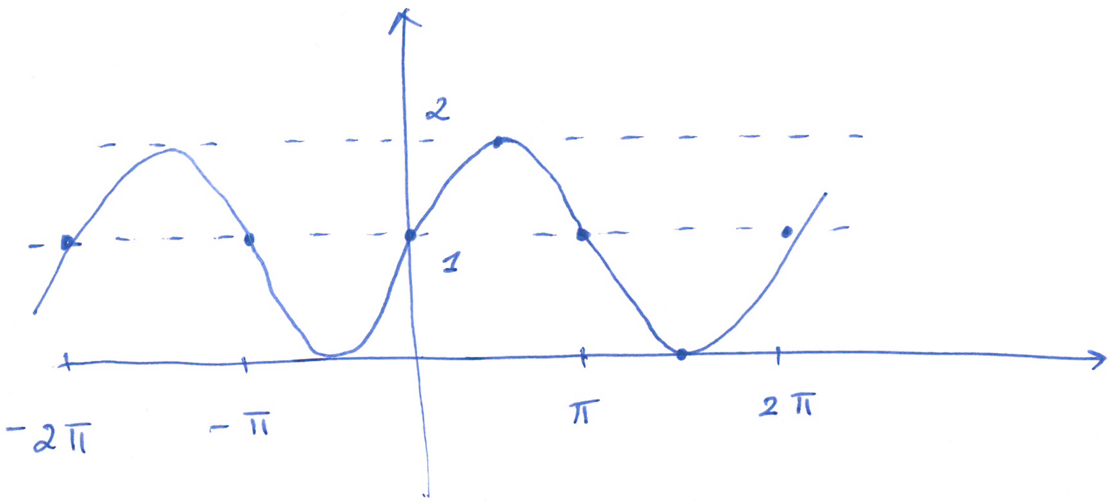
(*i*) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) + 1$ und die Mengen $A = [0, \pi)$ und $B = [-1, 1]$ bestimmen Sie die Bildmenge $f(A)$ und die Urbildmenge $f^{-1}(B)$.

(*ii*) Für die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(x + 1) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2.$$

bestimmen Sie die Funktion $f \circ g$, falls diese existiert. Geben Sie gegebenenfalls den Definitions- und Bildbereich von $f \circ g$ an.

(i)



$f([0, \pi)) = [1, 2]$ 2

$f^{-1}([-1, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 3

(ii) $f \circ g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2 + 1)$.

2

Aufgabe 5: .... (8 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus die ganzen Zahlen n und m, so dass $\operatorname{ggT}(25, 11) = n \cdot 25 + m \cdot 11$.

Geben Sie alle Rechenschritte an.

3P.

$$\left\{\begin{aligned} 25 &= 2 \cdot 11 + 3 \\ 11 &= 3 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow \quad 1 = 3 + (-1) \cdot 2 = 3 + (-1)(11 + (-3) \cdot 3)$

5P

$$\left\{\begin{aligned} &= (-1) \cdot 11 + 4 \cdot 3 = \\ &(-1) \cdot 11 + 4(25 + (-2) 11) \\ &= \underbrace{4}_{n} \cdot 25 + \underbrace{(-9)}_{m} \cdot 11 \end{aligned}\right.$$

Aufgabe 6: .... (5 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils nur eine Antwort an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt und jede falsche Antwort mit −1 Punkt bewertet. Ist die so erhaltene Gesamtpunktzahl negativ, runden wir sie auf 0 auf.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} 6^{i+j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} 2^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 3^j\right)$.

- ☐ Wahr
- ☒ Falsch

(b) Seien p, q Aussagen. Eine Verneinung von $p \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ist

- ☒ $\neg p \wedge (\neg p \Rightarrow q)$
- ☐ $\neg p \wedge (\neg p \vee \neg q)$

(c) Alle reellen Lösungen von $x + 1 < |x|$ erfüllen

- ☐ $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$
- ☒ $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

(d) Die Unkehrfunktion von $f : [1, \infty) \to [-1, \infty)$, $f(x) = x^2 - 2x$ existiert.

- ☒ Wahr
- ☐ Falsch

(e) Sei M eine nicht leere Menge. Die Relation $\subseteq$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

- ☐ Wahr
- ☒ Falsch