Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Maria Charina und Stefan Haller

DAUER: 60 Minuten

STEOP: Modulprüfung — Einführung in die Mathematik
4. Termin am 14. März 2019, 13:15–14:45 Uhr in HS 1

Nachname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: .... Studienkennzahl: ....

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

Sie können maximal 40 Punkte erreichen. Mit mindestens 20 Punkten ist die Prüfung bestanden.

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Notenskala:

Note	5	4	3	2	1
Punkte	< 20	$20-24$	$25-29$	$30-34$	≥ 35

Aufgabe 1: .... (7 Punkte)

(a) Wann wird eine Abbildung $f\colon A \to B$ injektiv genannt? Geben Sie eine präzise Definition.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Die Abbildung $g\colon (2,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{2-x}$, ist surjektiv.

1 P.

a) Eine Abbildung $f: A \to B$ heißt injektiv, falls gilt:

$\forall x, y \in A: \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

1 P. 1 P.

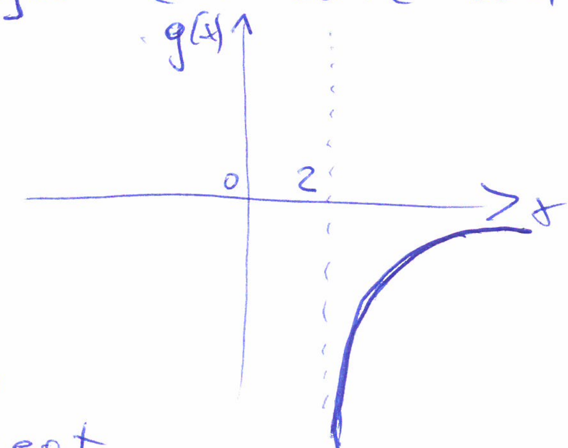
Auch korrekte verbale Beschreibung zulässig.

b) g ist nicht surjektiv. 2 P.

Weitere 2P. für nachvollziehbare Begründung.

Etwa:

- g nimmt nur negative Werte an
- Graph von g:



- $g((2,\infty)) = (-\infty, 0)$
- lösen wir $\frac{1}{2-x} = y$ nach y erhalten wir $x = 2 - \frac{1}{y}$; für $y > 0$ liegt dies aber nicht im Definitionsbereich von g.
- g nimmt den Wert 0 nicht an.

Aufgabe 2: .... (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage **mittels vollständiger Induktion**: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

I.A. $(n=1)$

z.z. $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$ 1P.

bzw $1 \leq 1$ w.A. 1P.

I.V. Sei $n \geq 1$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ 1P.

I.S. z.z. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ 1P.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \overset{1P.}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\underset{I.V.}{\overset{1P.}{\leq}} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = (*)$$

$$\begin{aligned}
\text{g.z.z:}\quad & 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} && \Big| -2 \\
\Longleftrightarrow\quad & -\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1} && \Big| \cdot n(n+1)^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & -(n+1)^2 + n \leq -(n+1)n && \\
\Longleftrightarrow\quad & -n^2 - 2n - 1 + n \leq -n^2 - n && \Big| +n^2+n \\
\Longleftrightarrow\quad & -1 \leq 0 \quad \text{w.A.} &&
\end{aligned}$$

2P.

alternativ: $(*) \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)n}$

$$= 2 - \frac{n+1-1}{n(n+1)} = 2 - \frac{n}{n(n+1)} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

2P.

Aufgabe 3: .... (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Elemente $x \in \mathbb{Z}_6$, die der Gleichung $\bar{2} \cdot x + \bar{3} = \bar{5}$ genügen.

(b) Geben Sie zwei Elemente $\bar{a} \neq 0$ und $\bar{b} \neq 0$ in $\mathbb{Z}_{14}$ an, für die $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$ gilt.

a)

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2} \cdot x + \bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$

$$\mathbb{L} = \{ \bar{1}, \bar{4} \}$$

1P. 1P.

Weiteren 1P. falls keine falschen Lösungen

b) etwa:

$a = \bar{2}$

$b = \bar{7}$

es gibt zahlreiche weitere Lösungen.

2P. falls a und b korrekt.

Wenigstens 1P. falls a oder b Nullteiler.

Aufgabe 4: .... (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine reelle Zahl a, sodass für die Funktionen

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := a \cdot x, \\ &g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad g(n) := 2^n, \quad \text{und} \\ &h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad h(n) := n + 3 \end{aligned}$$

die Gleichung $f \circ g = g \circ h$ gilt.

(b) Für die Funktion

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) := (x-1)^2(x+1)^2$$

bestimmen Sie die Urbildmengen $p^{-1}(0)$ und $p^{-1}(B)$, wobei $B := (-\infty, 0)$.

a) $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2^n) = a \cdot 2^n$ 1P.

$(g \circ h)(n) = g(h(n)) = g(n+3) = 2^{n+3}$ 1P.

$a \cdot 2^n = 2^{n+3}$ 1P.

$\Leftrightarrow a = 2^3 = 8$ 1P.

Alle 4 Punkte für $a = 8$.

b) $p^{-1}(0) = \{1, -1\}$ 2P.

$p^{-1}(B) = \emptyset$ 2P.

Aufgabe 5: .... (7 Punkte)

(a) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und seien B_1, B_2 zwei Teilmengen von Y. Zeigen Sie

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

(b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$. Bestimmen Sie zwei Teilmengen A_1 und A_2 von $\mathbb{R}$, für die

$$g(A_1 \cap A_2) \neq g(A_1) \cap g(A_2)$$

gilt. Geben Sie weiters $g(A_1 \cap A_2)$ und $g(A_1) \cap g(A_2)$ an.

a) Für $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\overset{1P.}{\Longleftrightarrow} f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\overset{1P.}{\Longleftrightarrow} f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\overset{1P.}{\Longleftrightarrow} x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ &\overset{1P.}{\Longleftrightarrow} x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

b) etwa $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{-1\}$

$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\} \neq \emptyset$

1P. für korrekte A_1 und A_2

1P. für korrektes $f(A_1 \cap A_2)$

1P. für korrektes $f(A_1) \cap f(A_2)$

Aufgabe 6: .... (5 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils nur eine Antwort an. Jede richtige Antwort wird mit $+1$ Punkt und jede falsche Antwort mit -1 Punkt bewertet. Ist die so erhaltene Gesamtpunktzahl negativ, runden wir sie auf 0 auf.

(a) Zu jeder Menge A existiert eine Menge B sodass $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$.

- ☒ wahr
- ☐ falsch

(b) Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei surjektive Abbildungen, dann muss auch $g \circ f$ surjektiv sein.

- ☒ wahr
- ☐ falsch

(c) Welche der folgenden komplexen Zahlen stimmt mit $1 + \mathbf{i} + \mathbf{i}^2 + \mathbf{i}^3$ überein?

- ☐ $\mathbf{i}$
- ☒ 0

(d) Die Aussage $(p \land (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ ist eine Tautologie.

- ☒ wahr
- ☐ falsch

(e) Die Verknüpfung $\otimes\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \otimes y := xy^2$ ist kommutativ.

- ☐ wahr
- ☒ falsch

Zusatzblatt: