Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Maria Charina und Stefan Haller

DAUER: 60 Minuten

STEOP: Modulprüfung — Einführung in die Mathematik
4. Termin am 14. März 2019, 13:15–14:45 Uhr in HS 1

Nachname: .... Vorname: ....

Matrikelnummer: .... Studienkennzahl: ....

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

Sie können maximal 40 Punkte erreichen. Mit mindestens 20 Punkten ist die Prüfung bestanden.

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Notenskala:

Note	5	4	3	2	1
Punkte	< 20	$20 - 24$	$25 - 29$	$30 - 34$	≥ 35

Aufgabe 1: .... (7 Punkte)

(a) Wann wird eine Abbildung $f\colon A \to B$ injektiv genannt? Geben Sie eine präzise Definition.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Die Abbildung $g\colon (2, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{2-x}$, ist surjektiv.

Aufgabe 2: .... (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage **mittels vollständiger Induktion**: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 3: .... (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Elemente $x \in \mathbb{Z}_6$, die der Gleichung $\bar{2} \cdot x + \bar{3} = \bar{5}$ genügen.

(b) Geben Sie zwei Elemente $\bar{a} \neq 0$ und $\bar{b} \neq 0$ in $\mathbb{Z}_{14}$ an, für die $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$ gilt.

Aufgabe 4: .... (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine reelle Zahl a, sodass für die Funktionen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f(x) := a \cdot x, \\ g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, &\quad g(n) := 2^n, \quad \text{und} \\ h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, &\quad h(n) := n + 3 \end{aligned}$$

die Gleichung $f \circ g = g \circ h$ gilt.

(b) Für die Funktion

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) := (x-1)^2(x+1)^2$$

bestimmen Sie die Urbildmengen $p^{-1}(0)$ und $p^{-1}(B)$, wobei $B := (-\infty, 0)$.

Aufgabe 5: .... (7 Punkte)

(a) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und seien B_1, B_2 zwei Teilmengen von Y. Zeigen Sie

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

(b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^2$. Bestimmen Sie zwei Teilmengen A_1 und A_2 von $\mathbb{R}$, für die

$$g(A_1 \cap A_2) \neq g(A_1) \cap g(A_2)$$

gilt. Geben Sie weiters $g(A_1 \cap A_2)$ und $g(A_1) \cap g(A_2)$ an.

Aufgabe 6: .... (5 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils nur eine Antwort an. Jede richtige Antwort wird mit $+1$ Punkt und jede falsche Antwort mit -1 Punkt bewertet. Ist die so erhaltene Gesamtpunktzahl negativ, runden wir sie auf 0 auf.

(a) Zu jeder Menge A existiert eine Menge B sodass $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$.

- ☐ wahr
- ☐ falsch

(b) Sind $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ zwei surjektive Abbildungen, dann muss auch $g \circ f$ surjektiv sein.

- ☐ wahr
- ☐ falsch

(c) Welche der folgenden komplexen Zahlen stimmt mit $1 + \mathbf{i} + \mathbf{i}^2 + \mathbf{i}^3$ überein?

- ☐ $\mathbf{i}$
- ☐ 0

(d) Die Aussage $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ ist eine Tautologie.

- ☐ wahr
- ☐ falsch

(e) Die Verknüpfung $\otimes\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \otimes y := xy^2$ ist kommutativ.

- ☐ wahr
- ☐ falsch

Zusatzblatt: