Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

WS 2020, K. Auinger, 3.2.2021

Maximale Punkteanzahl: 16; Schlüssel: 4 ab 8, 3 ab 10, 2 ab 12, 1 ab 14
Es sind keinerlei Unterlagen und (elektronische) Hilfsmittel außer das Vorlesungsskriptum erlaubt.

1. Seien V, W K-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: φ ist genau dann injektiv, wenn für jede linear unabhängige Teilmenge B von V das Bild $\varphi(B)$ linear unabhängig in W ist. (4 P)

2. Seien V ein K-Vektorraum und v_1, v_2, v_3 drei beliebige Elemente von V. Spannen die Mengen $\{v_1, v_2, v_3\}$ und $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$ denselben Teilraum von V auf? (4 P)

3. Sei A eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (a) Zu jedem $b \in K^m$ existiert eine Lösung $s \in K^n$ des Gleichungssystems $Ax = b$.

   (b) $\mathrm{rg}A = m$ (Dabei bezeichnet $\mathrm{rg}A$ den Rang der Matrix A.)

   (4 P)

4. (a) Definieren Sie den Begriff des Dualraums V^* eines Vektorraums V. (1 P)

   (b) Zeigen Sie: ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, dann gibt es zu jedem Vektor $v \in V$, $v \neq o$, ein lineares Funktional φ mit $\varphi(v) \neq 0$. (3 P)

Zur Verfügung gestellt von:
Karl Auinger
PR Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
WiSe 2020/21
LV-Nr.: 250013
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!