Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

WS 2020, K. Auinger, 3.3.2021

Maximale Punkteanzahl: 16; Schlüssel: 4 ab 8, 3 ab 10, 2 ab 12, 1 ab 14
Es sind keinerlei Unterlagen und (elektronische) Hilfsmittel außer das Vorlesungsskriptum erlaubt.

1. Sei $V = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen mit Grad ≤ 5 und $D\colon V \to V$ die Differentiationsabbildung $p \mapsto p'$. Finden Sie je eine Basis von $\mathrm{Im}D$ und von $\ker D$. (4 P)

2. Seien V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und v_1, v_2, v_3 drei beliebige (nicht notwendigerweise verschiedene) Elemente von V. Spannen die Mengen $\{v_1, v_2, v_3\}$ und $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ notwendigerweise denselben Teilraum von V auf? (4 P)

3. Sei A eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (a) Zu jedem $b \in K^m$ existiert höchstens eine Lösung $s \in K^n$ des Gleichungssystems $Ax = b$.

   (b) $\mathrm{rg}A = n$ (Dabei bezeichnet $\mathrm{rg}A$ den Rang der Matrix A.)

   (4 P)

4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, B eine geordnete Basis von V, $\lambda \in K$ ein Skalar und id_V die identische Funktion auf V. Zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung $[\lambda \mathrm{id}_V]_{BB}$ der linearen Abbidlung $\lambda \mathrm{id}_V$ unabhängig von der Basis B ist. (4 P)

Zur Verfügung gestellt von:
Karl Auinger
PR Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
WiSe 2020/21
LV-Nr.: 250013
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!