**Einführung in die lineare Algebra und Geometrie**

WS 2020, K. Auinger, 23.4.2021

Maximale Punkteanzahl: 16; Schlüssel: 4 ab 8, 3 ab 10, 2 ab 12, 1 ab 14
Es sind keinerlei Unterlagen und (elektronische) Hilfsmittel außer das Vorlesungsskriptum erlaubt.

1. Sei $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen mit Grad $\leq 4$ und $\varphi\colon V \to V$ die Abbildung $p \mapsto \varphi p$, wobei die Polynomfunktion $\varphi p$ definiert ist durch:
$$(\varphi p)(x) := \frac{d}{dx}(xp(x)).$$
   (a) Zeigen Sie: $\varphi$ ist eine lineare Abbildung. (1 P)
   (b) Für eine von Ihnen selbst gewählte geordnete Basis $B$ von $V$ bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[\varphi]_{BB}$. (3 P)
2. Seien $V$ und $W$ endlichdimensionale $K$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\{w_1, \ldots, w_k\}$ eine Basis von $\operatorname{Im} f$ und seien $u_1, \ldots, u_k \in V$ so gewählt, dass $f(u_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Weiters sei $\{v_1, \ldots, v_d\}$ eine Basis von $\ker f$. Zeigen Sie: die Vektoren $v_1, \ldots, v_d, u_1, \ldots, u_k$ bilden eine Basis von $V$. (Die Dimensionsformel $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ können Sie dabei verwenden.) (4 P)
3. Seien $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum, $\lambda \in K$ und $v \in V,\ v \neq o$. Zeigen Sie, dass es ein lineares Funktional $\varphi$ auf $V$ gibt mit $\varphi(v) = \lambda$. (4 P)
4. Sei $A$ eine $m \times n$-Matrix über einem Körper $K$ und $L$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = o$. Zeigen Sie, dass $L$ ein linearer Teilraum von $K^n$ ist und beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem eine Basis von $L$ gefunden werden kann. (4 P)

Zur Verfügung gestellt von:
Karl Auinger
PR Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
WiSe 2020/21
LV-Nr.: 250013
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!