Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

WS 2020, K. Auinger, 18.6.2021

Maximale Punkteanzahl: 16; Schlüssel: 4 ab 8, 3 ab 10, 2 ab 12, 1 ab 14
Es sind keinerlei Unterlagen und (elektronische) Hilfsmittel außer das Vorlesungsskriptum erlaubt.

(a) Definieren Sie den Begriff der Invertierbarkeit einer $n \times n$-Matrix über einem Körper K. Beschreiben Sie einen Algorithmus, wie für eine Matrix $A \in M_{nn}(K)$ überprüft werden kann, ob A invertierbar ist. (3 P)

(b) Definieren Sie den Begriff der direkten Summe $U \oplus W$ zweier Teilräume U und W eines K-Vektorraumes V. Sei V endlichdimensional und $U \subseteq V$ ein nichttrivialer Teilraum. Gibt es immer einen Teilraum $W \subseteq V$ mit $U \oplus W = V$? (Beweis oder Gegenbeispiel) (4 P)

(c) Sei V ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Zeigen Sie die folgende Aussage:

$$\forall v \in V \setminus B \colon B \cup \{v\} \text{ ist linear unabhängig } \iff v \notin [B].$$

(4 P)

(d) Sei $A \in M_{mn}(K)$ und $b \in K^m$. Zeigen Sie: die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist entweder leer oder eine Menge der Form $v+U$ für einen linearen Teilraum U von K^n und einen Vektor $v \in K^n$. Ist U eindeutig bestimmt? Ist v eindeutig bestimmt? (5 P)

Zur Verfügung gestellt von:
Karl Auinger
PR Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
WiSe 2020/21
LV-Nr.: 250013
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!