Übungen zur Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie

Winter-Semester 2020, K. Auinger

1. Man zeige ausschließlich mittels geometrischer Überlegungen, dass die Seitenlänge $a$ und die Diagonale $d$ eines Quadrates inkommensurabel sind. Hinweis: seien $a_1 := d - a$ und $d_1 = a - a_1$; dann ist $d_1$ die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge $a_1$.
2. Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen 01-Folgen abzählbar ist.
3. Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen 01-Folgen, die *nicht* ab einem Index konstant (0 oder 1) sind, überabzählbar sind.
4. Sei $W$ ein Würfel und $O$ eine Ecke; zeige, daß die Winkel zwischen der Würfeldiagonale (durch $O$) zu den drei Kanten (durch $O$) gleich groß sind und berechne die Größe dieser Winkel.
5. Dasselbe für die Seitenflächendiagonalen durch $O$.
6. Erfüllt das innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die Kürzungsregel? D.h.: folgt für $x, y, z \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, aus $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ stets $y = z$?
7. Zeige, daß für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt ($d$ ist hier immer $= 2$ oder $= 3$):
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
8. Zeige, dass für beliebige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $\|a\| = \|b\|$ gilt:
$$0 \le \langle a, a+b\rangle = \langle b, a+b\rangle\,.$$
9. Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0 \neq y$; zeige, dass $z = \|y\|x + \|x\|y$ den Winkel zwischen $x$ und $y$ halbiert.
10. (Grassmannidentität) Zeige: für alle $x, y, z, \in \mathbb{R}^3$ gilt
$$x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle\, y - \langle x, y\rangle\, z.$$
11. (Jacobiidentität) Zeige: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt
$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$
12. Erfüllt das äußere Produkt das Assoziativgesetz? (Beweis oder Gegenbeispiel)
13. Erfüllt das äußere Produkt $(x, y) \mapsto x \times y$ die Kürzungsregel? D.h.: folgt für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$, aus $x \times y = x \times z$ stets $y = z$?
14. Besitzt das äußere Produkt ein neutrales Element?
15. Bestimme die Gleichung der Geraden durch $(1, 3)$, die normal zum Richtungsvektor $(1, -1)$ ist; dasselbe für die Gerade, die parallel zu diesem Vektor ist.
16. Bestimme die Hesse'sche Normalform der Gleichung der Ebene $x = (1, 1, -1) + \lambda(1, 2, 0) + \mu(2, -1, 3)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ )$.
17. Bestimme den Abstand des Punktes $P = (1, 1, 1)$ von der Ebene $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4 = 0$.
18. Finde den Abstand zwischen den (windschiefen) Geraden $g$ und $h$, wobei $g$ durch $(5, 2, 1)$ und $(7, 1, 3)$ und $h$ durch $(1, 1, 0)$ und $(3, 1, 2)$ geht.
19. Seien $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$; zeige, dass für das Spatprodukt gilt:
$$a_1 a_2 a_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$
20. Bringe die folgenden Matrizen auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2i \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Finde die allgemeine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:
$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

22. Ebenso für:
$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 4 \end{array}$$

23. Ebenso für:
$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & + & x_6 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 4 \end{array}$$

24. Ebenso für:
$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & - & x_6 & = & -4 \end{array}$$

25. Ebenso für:
$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & + & 4x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

26. Dasselbe für:
$$\begin{array}{ccccccc} 6x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccccccc} 6x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

27. Löse $Ax = b$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf zwei Arten: einmal durch das Eliminationsverfahren und einmal mittels der Cramer'schen Regel..

28. Für die folgenden Matrizen $A$ und $B$ bestimme $AB$, $BA$, $(AB)^2$ und $(BA)^2$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Kann man $A^2$ und/oder $B^2$ bilden?

29. Man bilde alle möglichen Matrizenprodukte $AB$ für
$$A, B \in \left\{ \begin{pmatrix} a & 2 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & t \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & 0 \\ w & x \\ 1 & z \end{pmatrix} \right\}.$$

30. Für einen beliebigen Körper $K$ seien $\lambda, \mu \in K$ und $A, B, C$ beliebige Matrizen über $K$. Zeige die folgenden Gesetze (wobei "=" stets so zu verstehen ist, dass eine Seite genau dann definiert ist, wenn die andere definiert ist, und die beiden Seiten in diesem Fall übereinstimmen):
    (a) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(b) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$
(c) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

31. Für beliebige Matrizen $A, B, C$ zeige man die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
    (a) $AB$ und $BC$ sind definiert;
    (b) $(AB)C$ ist definiert;
    (c) $A(BC)$ ist definiert.

32. Finde $2 \times 2$-Matrizen $A, B$ über $\mathbb{Q}$, sodaß $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ gilt. Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit.

33. Sei $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{pmatrix}$ eine $4 \times 6$-Matrix (mit $a_i$ die Spalten von $A$ und $a^j$ die Zeilen von $A$). Finde Matrizen $X, Y$ mit
$$XA = \begin{pmatrix} a^4 + a^2 \\ a^1 + a^3 \end{pmatrix} \text{ und } AY = (a_6 - a_1, a_4 + a_3).$$

34. Zeige: in jedem Vektorraum $V$ über dem Körper $K$ gilt: $(-c)u = c(-u) = -(cu)$ für alle $c \in K$ und $u \in V$.

35. Man zeige, dass das Vektorraumaxiom (S4) $\forall\, v \in V : 1v = v$ ersetzt werden kann durch (S4') $\forall\, v \in V : v \neq o \Rightarrow 1v \neq o$ (1 ist das Einselement von $K$, $o$ das Nullelement von $V$). D.h. wenn eine skalare Multiplikation $\cdot : K \times V \to V$ (S4') und (S1-S3) erfüllt, dann erfüllt sie auch (S4).

36. Man finde eine skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die alle Vektorraumaxiome außer (S4) erfüllt.

37. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ bilden einen Teilraum?
    (a) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0\}$
    (b) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 2x_2\}$
    (c) $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$
    (d) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = 0\}$
    (e) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 = 1\}$

38. Dasselbe für $\mathbb{R}^3$ ($x = (x_1, x_2, x_3)$):
    (a) $\{x \mid x_1 + x_2 = x_3\}$
    (b) $\{x \mid x_1 = 2\}$
    (c) $\{x \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3\}$

39. Dasselbe für $\mathcal{P}_2$ ($\mathcal{P}_n$ der Vektorraum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Grad $\leq n$):
    (a) $\mathcal{P}_1$
    (b) Menge aller $p \in \mathcal{P}_2$ mit $p(0) = 0$
    (c) Menge aller $p \in \mathcal{P}_2$ mit $p(0) = 1$

40. Bestimme alle Teilräume von $\mathbb{R}^3$.

41. Seien $U$ und $W$ Teilräume eines Vektorraums $V$; zeige: $U \cup W$ ist genau dann ein Teilraum, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

42. Sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig oder abhängig? Bilden sie eine Basis?
    (a) $x = (1, 0, 1)$, $y = (0, 1, 0)$
    (b) $x = (1, 1, 0)$, $y = (1, 1, 1)$, $z = (0, 0, 1)$
    (c) $x = (1, -1, 0)$, $y = (1, 1, -1)$, $z = (0, 0, 1)$.

43. Seien $v_1, v_2, v_3$ Elemente eines Vektorraumes $V$ über $\mathbb{Q}$; zeige: $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ linear unabhängig ist. Gilt die Behauptung auch für Vektorräume über beliebigen Körpern?

44. Die Elemente $1, \sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

45. Sei $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ die Menge aller Primzahlen. Zeige: die Menge $\{\log p \mid p \in \mathbb{P}\} \subseteq \mathbb{R}$ ist linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

46. Man zeige, dass die Funktionen 1 (konstante Funktion), sin, $\sin^2$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear unabhängig sind, aber dass die Funktionen 1, sin, $\sin^2$, $\cos^2$ linear abhängig sind.

47. Ergänze die Vektoren $(1, 2, 1)$ und $(2, 3, 1)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ (a) durch Hinzufügen irgendeines geeigneten Vektors, (b) durch Hinzufügen eines geeigneten Einheitsvektors.

48. Seien $U$ und $W$ endlich erzeugte Teilräume eines Vektorraums $V$ mit $U \cap W = \{o\}$. Man zeige: sind $B_U$ und $B_W$ Basen von $U$ und $W$, dann ist $B_U \cup B_W$ eine Basis von $U \oplus W$.

49. Welche Einheitsvektoren kann man zu $v_1 = (1, -4, 2, -3)$ und $v_2 = (-3, 8, -4, 6)$ hinzufügen, um eine Basis von $\mathbb{R}^4$ zu erhalten?

50. Für $U = [(1, -4, 2, -3), (-3, 8, -4, 6)]$ bestimme man einen Teilraum $W$ von $\mathbb{R}^4$, sodass $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

51. Für die Teilräume $U = [(1, 0, 1, 2), (1, 1, 2, 4), (2, 1, 3, 6)]$ und $W = [(-1, 2, 1, 2), (1, -1, 1, 1)]$ von $\mathbb{R}^4$ berechne $\dim(U \cap W)$ und $\dim(U + W)$.

52. Man finde Basen für $U$, $W$, $U + W$ und $U \cap W$ für $U$ und $W$ aus dem vorigen Beispiel.

53. Bestimme den Rang der folgenden Matrizen:
$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2i \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

54. Für multiplizierbare Matrizen $A$ und $B$ zeige man, dass $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)$. (Hinweis: sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$. Verwenden Sie $\begin{pmatrix} a_1 B \\ \vdots \\ a_m B \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_n \end{pmatrix}$.)

55. Berechne die Inverse von $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

56. Bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die Matrix $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und berechne $A_\lambda^{-1}$ für diese $\lambda$.

57. Zeige, dass die Matrixtransposition das Gesetz $(AB)^T = B^T A^T$ erfüllt. (Dies ist wieder so zu verstehen, dass entweder beide Seiten nicht definiert sind, oder beide Seiten sind definiert und gleich.)

58. Zeigen Sie: für jede reguläre $m \times m$-Matrix $A$ und jede $m \times n$-Matrix $B$ gilt $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$.

59. Man Bestimme den Koordinatenvektor $[A]_B$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ bezüglich der geordneten Basis $B = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

60. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

    (a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, \sqrt{2}x_1 - x_2, 2x_2)$
    (b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$
    (c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_1 - x_2)$
    (d) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2$ (für fix gewählte $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$).

61. Man zeige die folgenden Aussagen über eine lineare Abbildung $f : V \to W$.

    (a) $\ker f$ ist ein Teilraum von $V$, $\operatorname{Im} f$ ist ein Teilraum von $W$.
    (b) Ist $V = [v_1, \ldots, v_n]$, so ist $\operatorname{Im} f = [f(v_1), \ldots, f(v_n)]$.
    (c) Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig in $V$, so sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig in $W$.
    (d) $\dim f(V) \leq \min\{\dim V, \dim W\}$.

62. Sei $B = \{(0, 1, 1), (0, 2, 1), (1, 5, 3)\}$; überprüfe, daß $B$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Gib eine explizite Formel $f(x_1, x_2, x_3) = ?$ an für die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, für die $f(0, 1, 1) = (1, -3, 2, 4)$, $f(0, 2, 1) = (5, -3, 0, 2)$ und $f(1, 5, 3) = (-2, 0, 1, 1)$ gilt.

63. Zeige anhand der zugehörigen Matrix $A$: es gibt keine surjektive [injektive] lineare Abbildung $K^n \to K^m$, wenn $n < m$ [$n > m$].

64. Bestimme $\ker f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{rg} f$ für die folgenden linearen Abbildungen:

    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2)$
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$.
    (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, x_2)$
    (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, 0)$

65. Sei $V$ ein Vektorraum und $f : V \to V$ linear mit $f \circ f = f$. Man zeige: $V = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$ (Hinweis: es gilt für jedes $v \in V$: $v = f(v) + (v - f(v))$). Zeige weiters: für $v \in V$, $v = u + w$ mit $u \in \operatorname{Im} f$ and $w \in \ker f$ gilt $f(v) = u$.

66. Sei $V$ ein Vektorraum und $V = U \oplus W$ für gewisse Teilräume $U$ and $W$. Sei eine Abbildung $\pi : V \to W$ definiert durch $\pi(v) = u$, wobei $v = u + w$ mit $v \in V$, $u \in U$ and $w \in W$ die eindeutige Darstellung (eines Elements von $V$ als Summe eines Elements von $U$ und eines Elements von $W$) ist. Man zeige: $\pi$ is linear mit $\operatorname{Im} \pi = U$, $\ker \pi = W$ und $\pi \circ \pi = \pi$. Die Abbildung $\pi$ heißt *Projektion von $V$ auf $U$ entlang $W$*. Was hat das mit dem vorigen Beispiel zu tun?

67. Sei $L_1 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ gegeben durch $(L_1 p)(t) = p(t + 1)$ (Translationsoperator). Finde $[L_1]_{BB}$, d.h. die Matrixdarstellung von $L_1$ bezüglich der geordneten Basis $B = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

68. Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ und $A \in V$. Zeige: $f_A : V \to V$, $X \mapsto AX - XA$ ist linear. Finde $[f_A]_{BB}$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ bezüglich $B = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

69. In der Algebra zeigt man, dass die sechs Elemente $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, i, i\sqrt[3]{2}, i\sqrt[3]{4} \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind (das muss in diesem Beispiel nicht gezeigt werden, sondern kann vorausgesetzt werden). Sei $V$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = [1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, i, i\sqrt[3]{2}, i\sqrt[3]{4}]$ mit der geordneten Basis $B = (1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, i, i\sqrt[3]{2}, i\sqrt[3]{4})$. Sei $\zeta$ die Abbildung $V \to \mathbb{C}$, $v \mapsto (\sqrt[3]{2} + i) \cdot v$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation komplexer Zahlen ist. Man zeige: $\zeta$ ist eine lineare Abbildung $V \to V$ (es muss insbesondere gezeigt werden, dass $\zeta(v) \in V$ für alle $v \in V$). Man bestimme die Matrixdarstellung $[\zeta]_{BB}$ von $\zeta$ bezüglich $B$. Weiters: ist $\zeta$ invertierbar? Wenn ja, bestimme man $\zeta^{-1}$ und $[\zeta^{-1}]_{BB}$.

70. Seien $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen den endlichdimensionalen Vektorräumen $U, V, W$. Man zeige, ohne Matrixdarstellungen zu verwenden: $\mathrm{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \min\{\mathrm{rg}(\varphi), \mathrm{rg}(\psi)\}$.
71. Seien $\varphi, \psi$ wie im vorigen Beispiel. Man zeige (ohne Matrixdarstellungen zu verwenden): ist $\psi$ injektiv, dann gilt $\mathrm{rg}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{rg}(\varphi)$.
72. Man wiederhole die Definition des Rangs einer linearen Abbildung und des Rangs einer Matrix. Seien $U, V$ endlichdimensionale Vektorräume, mit geordneten Basen $B$ von $U$ und $C$ von $V$ und $\psi : U \to V$ eine lineare Abbildung. Man zeige: $\mathrm{rg}(\psi) = \mathrm{rg}([\psi]_{CB})$. Folgere, dass elementare Zeilenumformungen den Spaltenrang einer Matrix nicht verändern.
73. Seien $U, V, W$ $K$-Vektorräume und $\varphi \in L(U, V)$. Man zeige, dass die Zuordnung $\Phi\colon \alpha \mapsto \alpha \circ \varphi$ eine lineare Abbildung $L(V, W) \to L(U, W)$ ist. Analog ist für $\psi \in L(V, W)$ die Zuordnung $\Psi\colon \alpha \mapsto \psi \circ \alpha$ eine lineare Abbildung $L(U, V) \to L(U, W)$.
74. Wie lauten die entsprechenden matrizen-theoretischen Aussagen des vorigen Beispiels, wenn die Vektorräume $U, V, W$ durch die konkreten Vektorräume $K^l, K^m, K^n$ ersetzt werden?