Lineare Algebra und Geometrie 1

SS 2021, K. Auinger, 02.07.2021
Maximale Punkteanzahl: 16; Schlüssel: 4 ab 8, 3 ab 10, 2 ab 12, 1 ab 14

(a) Für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

finde man eine orthogonale Matrix S, die A diagonalisiert (über $\mathbb{R}$), dh es soll $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix sein. (4P)

(b) Man bestimme für beliebige $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & z & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis muss "mit der Hand" erzielt werden, elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt! Geben Sie eine genaue Erklärung der Vorgangsweise, inklusive Angabe aller verwendeten Resultate über Determinanten, und schreiben Sie alle Zwischenergebnisse auf. Wird nur das Endergebnis aufgeschrieben, und gesagt, "es wurde Satz XY angewendet", dann wird die Abgabe als Schwindelversuch gewertet. (4P)

(c) Sind die 3×3-Matrizen A und B (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie die entsprechende diagonalisierte Form an (mit Begründungen).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Für den Fall der Diagonalisierbarkeit bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren des $\mathbb{R}^3$. (4P)

(d) Sei der Euklidische Raum $E = \mathbb{R}^3$ (ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt) und $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die adjungierte Abbildung $\phi^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Ist ϕ normal? (4P)

Zur Verfügung gestellt von:
Karl Auinger
PR Lineare Algebra und Geometrie 1
SoSe 2021
LV-Nr.: 250147
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!