Lineare Algebra und Geometrie 1

SS 2021, K. Auinger, 13.10.2021
Maximale Punkteanzahl: 16; Schlüssel: 4 ab 8, 3 ab 10, 2 ab 12, 1 ab 14

Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computeralgebraprogramm wie Mathematica oder GeoGebra und dergleichen erlaubt. Ein elektronisches Schreibtablet zum Erstellen des pdf-Files darf natürlich verwendet werden.

(a) Für $n \geq 2$ sei $L_n = (\ell_{ij})$ die $n \times n$-Matrix

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dh es gilt:

$$\ell_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ wenn } i + j = n + 1 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\det L_n$ in Abhängigkeit von n. (Begründung angeben!) (4P)

(b) Man stelle fest, für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

(über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar ist. (Begründungen angeben! Alle Rechenoperationen müssen „mit der Hand“ durchgeführt werden und nachvollziehbar dargestellt werden.) (4P)

(c) Bestimmen Sie den Rang und den Positivitätsindex der quadratischen Form $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 4x_1x_3$. (Begründungen angeben) (4P)

(d) Bestimmen Sie im $\mathbb{R}^3$ Orthonormalbasen von $M = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^\perp$ und von $N = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^\perp$.

(4P)

Zur Verfügung gestellt von:
Karl Auinger
PR Lineare Algebra und Geometrie 1
SoSe 2021
LV-Nr.: 250147
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!